希尔伯特第六问题引论

魏晓明 著



科学技术文献出版社



希尔伯特第六问题引论

魏晓明　著

科学技术文献出版社

Scientific and Technical Documents Publishing House

北　京

图书在版编目(CIP)数据

希尔伯特第六问题引论/魏晓明著. - 北京:
科学技术文献出版社,1999.6
ISBN 7-5023-3357-6
Ⅰ.希… Ⅱ.魏… Ⅲ.理论物理学 Ⅳ.O411

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 25237 号

出 版 者:科学技术文献出版社
图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼 B 段/100038
图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789
图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009
门 市 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部传真:(010)68514035
图书编务部传真:(010)62868317
E-mail:stdph@istic.ac.cn;stdph@public.sti.ac.cn
策 划 编 辑:王清富
责 任 编 辑:刘新荣
责 任 校 对:李正德
责 任 出 版:周永京
封 面 设 计:宋雪梅
发 行 者:科学技术文献出版社发行 新华书店总店北京发行所经销
印 刷 者:北京国马印刷厂
版(印)次:1999 年 6 月第 1 版 1999 年 6 月第 1 次印刷
开 本:850×1168 32 开
字 数:206 千
印 张:8
印 数:1-4000 册
定 价:16.00 元

（京）新登字130号

内 容 简 介

本书研究的是希尔伯特二十三个问题中的第六个问题，即：把整个物理理论公理化，使得任何一个实验物理定律都可以用数学推理从一组完备的公理得到。众所周知，实现物理理论大统一的困难在于物理定律的非线性和量子化的表述形式，这两个困难在本书中被完全克服。本书可供数学和物理专业高年级大学生、研究生及科研人员阅读参考。

TO MY PARENTS

MY SISTER

AND MY DEAR WIFE

作 者 自 序

上士闻道，勤而行之；中士闻道，若存若亡；
下士闻道，大笑之！不笑不足以为道。

——老子

众所周知，Hilbert 第六问题无论是在物理学界还是在数学界都是著名的难题，我开始涉足这个问题是在 1983 年的夏天，当时我在中国科学院工程热物理所攻读硕士学位，论文题目是利用计算机数值求解可压缩流体的流场。学流体的人都很清楚，所谓计算流体就是用计算机求解 Euler 方程、Navier-Stokes 方程和 Reynolds 方程，这三个方程在推导过程中都做了大量的简化、省略和近似。如果把它们作为工程上的一种定性的校验手段，或许是可取的，作为理论上的基本方程就难以令人信服了。正是由于这个原因，所有搞计算流体的人都有意无意地将自己的计算结果向实验结果拟合，这一点大家都心照不宣。有一次，我的师弟向我讲了一件很有趣的事情，当年西德的一家空气动力实验室有鉴于计算流体学界的这种不良的学术倾向，设计了一个新的二维翼形，发表了翼形的几何和来流参数，但是不发表空气动力实验结果。他们与全世界的计算流体学者约定：你做你的计算，我做我的实验，到时候大家拿结果来对比。令人沮丧的是，没有一个计算结果真正与实验结果近似到工程允许的范围内，连最简单的激波位置都不能与实验相符。这件事使我十分震惊，理论本来应该指导实践，可是在这里，理论成了实践的可有可无的附庸！其实，不仅是在计算流体学界，在物理学的其他领域也有类似的现象。每一个立志攀登科学高峰的青年都会有这样的感觉，当你在大学，在研究生院学习古典理论的时候，你会有

一种无与伦比的优美感觉，你会觉得古典理论的基础是如此的坚实和不可动摇。可是当你毕业进入科学研究的前沿的时候，你就会遇到许多令人痛苦、无奈的近似、假设和省略，以及一些似是而非的推导。我就曾深深地为此感到悲哀，其实本来我可以视而不见，继续我的计算流体生涯。事实上，1987 年我在美国 Virginia Tech 读书的时候，曾经得到当时世界上最好的数值结果：我计算出来的一维 Laval 喷管的数值激波严格限制在一个计算网格之内，而且结果与理论上的解析解完全重合。这个漂亮的结果甚至驱使一些美国人在我的计算机硬盘上安装了一个小玩意来窃取我的程序。但是，我对计算流体已经失去了兴趣，我已经在开始寻求新的解决办法了。早在 1983 年，最先引起我注意的是蔡树棠教授 50 年代写的一篇论文，他在这篇文章里把湍流看作层流与涡子的迭加，经过一些简化之后，在球坐标中解出了涡子。虽然结果不尽如人意，但是其数学上的优美给我留下了深刻印象，特别是把湍流看作层流与涡子迭加的思想就是本书的基本出发点之一。蔡教授是周培源先生的高足，成名很早，对于我这个无名后辈的冒昧询问给予了热情的指导，他指出困难在于数学上难于处理非线性的 Navier-Stokes 方程。从此以后，我就开始了攻克 Hilbert 第六问题的艰苦跋涉，屈指算来，已有 15 年了。

记得在美国的时候，我在图书馆里偶尔翻到一本书，作者好像是一位华裔学者，我记不得他的名字了。他也是从事大统一理论研究的，论文写出来以后，给美国各大学物理系的几十位教授们寄去，希望能够有些评价和反响。可是大多数回信都是说，我们对这个领域不熟悉，请你找别人审阅。其实科学史上这样的事情也是经常发生的，大家所熟知的群论的发现者 Galois 就是一例，如果 Cauchy 和 Poisson 能够及时发现 Galois 论文中的深邃精妙的数学思想而稍加扶持，为他的生活找到一根科学的支柱，Galois 也不至于在一场毫无意义的决斗中失去了他年仅 20 岁的生命。熟知科学史

的人都会知道，一个新的理论常常不是由于说服了权威们而战胜旧的理论，而是由于后起的青年学子纷纷承认新理论而最终战胜旧理论的。

科学总是要不断地新陈代谢，我寄希望于科学的新生代！

作　者

1999年1月于北京

前　言

1900 年，著名数学家 Hilbert 在巴黎第二届国际数学家大会上提出了 23 个数学问题，这些数学问题都是当时世界公认的难题，其中的大部分经过近一个世纪以来的努力已经解决。本书研究的是 Hilbert 问题中的第六个问题，即：把整个物理理论公理化，使得任何一个实验物理定律都可以用数学推理从一组完备的公理得到，也就是物理学理论大统一问题。建立这样一个大统一理论是许多物理学家的梦想，在本世纪初，这个梦想曾被认为最接近实现，因为当时建立在牛顿定律和能量守恒定律上的物理理论似乎无往而不胜，除了牛顿定律本身的非线性困难以外，没有任何力量能够阻止物理学向人的意识以外的客观世界进军。可是后来出现了量子理论和相对论理论，大统一的梦想被粉碎了。因为牛顿定律不能提供一套自然的量子数，无法解释量子现象，也无法解释高速运动物体的行为，于是不同的物理现象不得不用不同的理论来解释。从那以来，冲击大统一理论的努力只是一些零星的个人行为，不再成为物理学的研究主流。但是，对物理学的这种人为的分割显然是不合理的，本书试图以 20 世纪辉煌的数学成果为基础，建立统一的物理理论。我们的主要挑战来自物理定律的非线性和量子结构所带来的困难，这些困难在本书中已经被克服，从而为 Hilbert 第六问题的最终解决铺平了道路。

本书首先给出了理想化物理实验的定义，并且假定理想化物理实验的结果是唯一的（唯一性公理）；其次假定流形上的物理量在一个开域上的值可以同胚映射到另一个开域上去（可观测性公理）；我们还假定流形的任何一个开域上的局部物理定律是相同的（第一协变公理）。这三个假定构成了我们的公理体系。

根据可观测性公理，我们把一个物理上有意义的流形 M 定义为一个 G 连通的微分方程子集，这里 G 是 M 的结构群。通过把局部物理定律展开为张量级数，可以把流形上的非线性物理量变成等价的线性物理量；通过全微分对偶诱导的映射，可以从一个偏微分方程定义的流形得到一个等价的常微分方程定义的流形；从生成结构群 G 的 Lie 代数可以得到一个完全已知的代表流形 O，给定流形 M 和代表流形 O 上的一对对应矢量，我们可以在 M 和 O 上各生成一个局部单参数子群及其酉表示，然后求出等距微分同胚 F: $O\rightarrow M$，进而从 Y_k span $\mathfrak{g}$ (O) 映射生成 X_k span $\mathfrak{g}$ (M)；得到了切空间 T (M) 的线性子空间 $\mathfrak{g}$ (M)，就可以定义度规张量，还可以生成结构群的任何一个群元及其酉表示；从这个酉表示就可以求出流形的任何几何性质，例如联络、曲率张量等。

本理论的另外两个重要支柱是著名的 Hodge 分解定理，及 Laplace-Baltrimi 算子 Δ 的特征值和特征形式的性质。从前者可以得到流形上任何微分形式必然满足的线性方程；从后者我们可以把紧致可定向流形上的任何微分形式展开为 Δ 算子的特征形式 Φ^j 的有限加和，通过从 Stokes 定理和 de Rham 定理导出的所谓边界条件反演的运算由边界条件确定展开系数，最终得到物理问题的精确解。

本书还证明了从 Δ 的特征形式能生成可以脱离流形 M 自由运动的量子和涡子。当我们无法直接追踪每一个量子或涡子的时候，可以用统计的方法来研究它们。实际上，量子和涡子就是原子物理中的基本粒子和流体力学中的涡子以及宇宙学中的星系和星团。给定不同的尺度因子，本书的理论可以用于研究微观或宏观世界中的任何物理对象。

通过定义一些常用物理量，如能量、质量、电荷、磁场强度、力、温度等，可以使本书的理论与现代物理学接轨，从而得到实验物理定律，例如：能量守恒、质量守恒、Newton 定律、热力学定

律、Pauli 不相容原理等等。用本书给出的方法可以得到物理问题的精确解，尽管其中有些步骤不一定能够解析解出，但是可以证明解是存在并且唯一的，因此可以放心地使用数值方法求解。

本书中所有定义和命题都是第一次提出。作为基本工具的微分流形的定义与微分几何中的古典定义有所不同，切空间和余切空间的定义以及它们之间的对偶也与古典定义有所不同。除了数学概念以外，还有一些物理上的基本概念是与古典定义不同的，例如，Schrödinger 方程、质量、时间、电荷、磁场、温度、激波、黑洞等，请读者务必留意。

目　录

第一章　基本概念及公理

Hilbert 第六问题研究的是所有物理问题的数学基础，我们的目标是使任何物理问题可以化为欧氏空间中的一组线性问题。可能出现同一个数学概念对应若干物理对象的情形，例如在物理学里，按照尺度不同，在量子力学中有原子，在湍流动力学中有涡子，在宇宙学中有恒星，尺度再大些还有星系、星团、星协等，在数学中它们都是相同的东西。本书在讨论的时候将不区别尺度，我们所得到的结论适用于任何物理对象。

值得一提的是，湍流流动是我们所能看到的最完整的物理图像之一，因此我们的物理图像主要来自湍流。湍流实验给我们最基本的印象是：它是由层流和涡子两部分迭加而成，所有的涡子都是从边界上释放出来的，向着远离边界的方向运动，涡子的数目符合统计规律。因此我们的理论也应该能够分别求出湍流的层流和涡子，而且它们所满足的基本方程必须是线性的，这样层流和涡子才能够迭加。

定义 1-1：一个物理实验是一系列可重复的操作，每重复一次这个操作系列可以在某个精度下得到一个唯一的有理数结果。

物理实验测出的数在有效位之内都是有理数。如果我们认为实验精度的提高是没有限制的，极限情况下出现无理数。在物理上，所谓唯一指的是在一定的实验精度内，超过了实验精度所保证的小数位数，实验数据是不确定的，谈不到唯一性。由于在分析运算中无法考虑这种不确定性，而且也没有理由为实验精度的提高设置一个上限，所以我们只考虑一种理想化的、无限精确的物理实验。

定义 1-2：理想化的物理实验是具有可操作性，可重复性和结果唯一性的物理实验。

理想化物理实验的结果是一个实数，这样的理想化使我们能够

顺利地应用现有的数学工具解决问题。尽管$\sqrt{-1}$是不可测量的，这并不排除我们使用复数域来构造数学模型，因为一个复物理量的实部和虚部可以分别测量。但是在本书中我们主要讨论用实数域构造的模型。

定义 1-3：物理量是实验值在空间中的分布，是坐标的函数。

定义 1-4：物理定律是物理量之间必须满足的函数关系。

物理定律一般地可以是常微分方程或偏微分方程，这些微分方程可以是任意阶的，齐次或非齐次的，线性或非线性的。

物理实验只有在欧氏空间中说明了适当的坐标以后才能做，物理定律也只有在欧氏空间中才能解析表达，因此实验测出的物理量是实验值在欧氏空间中的分布。但是，如我们在微分几何学和物理学里所熟知的，我们只能假设空间是局部欧的。一个观测者所做的实验只能准确说明他周围一个开域内发生的物理事件，他不可能对整个空间发生的物理事件作出准确的说明，因为任何关于遥远空间的观测都可能是失真的。例如，遥远星系发出的光线在到达我们的眼睛之前可能已经多次被弯曲了。于是，物理事件赖以发生的构型空间是一个局部欧的流形 M，关于物理量和物理定律的定义 1-3、1-4 只是局部的。一般地说，物理量在局部欧氏空间上的限制是定义在欧氏空间的开域上的局部函数；物理定律在局部欧氏空间上的限制是定义在欧氏空间的开域上的局部微分方程。如果两个开域的交集非空，则两个开域由一个同胚映射 u 连接。

按照定义 1-2，物理量在任何一点的值是唯一确定的，所以我们提出：

唯一性公理 1-5：物理量在流形上任何一点的值是唯一的。

如果$\{x^j\}$和$\{y^k\}$分别是开域 U 和 V 上的局部坐标（图 1-1），物理量 α 在 U 和 V 上的限制分别是

$$\alpha_U(x^1, x^2, \cdots, x^m) \quad 和 \quad \alpha_V(y^1, y^2, \cdots, y^m) \tag{1-1}$$

则在点 $x \in U \cap V$ 上必有，

$$u\alpha_U = \alpha_V \tag{1-2}$$

其中
$$u:\{y^i = u^i(x^1, x^2, \cdots, x^m\} \tag{1-3}$$

对于物理定律也有类似的结论，若某个物理定律 f 在局部开域 U 上表示为

$$f_U(\alpha_U, \beta_U, \gamma_U, \cdots) = 0 \tag{1-4}$$

其中 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 是流形上的物理量。按定义 f 只是物理量的函数，因此 f 也是物理量，我们有

$$\begin{aligned} uf_U(\alpha_U, \beta_U, \gamma_U, \cdots) &= f_V(u\alpha, u\beta, u\gamma, \cdots) \\ &= f_V(\alpha_V, \beta_V, \gamma_V, \cdots) \end{aligned} \tag{1-5}$$

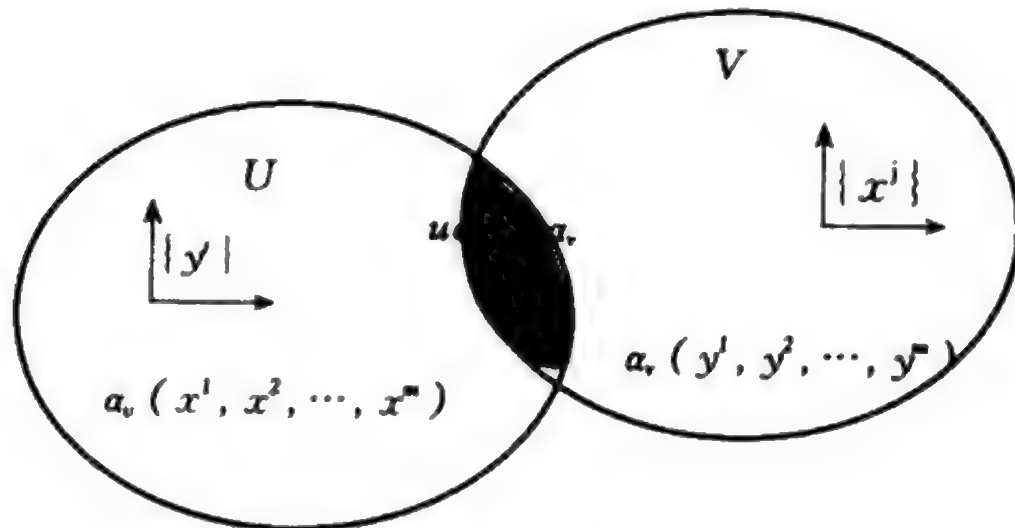


图 1-1

可观测性公理 1-6：流形上的物理量和物理定律满足 1-2 和 1-5。

如果 1-2 和 1-5 两端的 U 和 V 是同一个开域，则对应的 u 是恒等映射，我们可以推论同一个开域上任何一点上的物理量和物理定律是唯一确定的，这与定义 1-2 和公理 1-5 是一致的。

我们称满足可观测性公理的物理量为整体可观测的，即，流形上的一个观测者从他所在的位置可以通过同胚映射间接观测物理量在其他任何一个开域上的性质和行为，虽然这种观测可能是失真的。我们还可以进一步拓展整体可观测性的定义：如果在流形 M 和 N 之间存在光滑映射 $F: M \to N$，就说 M 是可以在 N 上观测的。值得注意

的是，整体可观测性是基于物理量的唯一性和开域之间的光滑映射，因此可以说，不具有唯一性的量是不可观测的。这一点很容易理解，因为物理实验只能产生唯一确定的结果，如果实验测得两个以上的结果，就破坏了物理量的唯一性。事实上，双值或多值的被测量将使实验设备无所适从，无法工作。此外，不存在光滑映射也意味着不可观测，这一点也是容易理解的，如果在图1-1的开域 U 和 V 之间不存在光滑映射，那么我们甚至没有办法在 U 和 V 的重叠区域上定义物理量的唯一性。

观测者总是处于运动中。换言之，在观测的同时，观测者的时空位置会发生变化，任何观测都不可能在某一个时空点上瞬间完成。如果局部物理量和物理定律与观测者的时空位置有关，观测不会产生任何结果。因为在这种情况下，虽然物理量和物理定律满足唯一性，可是由于观测者的运动，导致被测量的对象不断变化，对于实验设备来说就如同被测对象不满足唯一性公理一样。所以我们提出：

第一协变公理 1-7：流形上的局部物理量和局部物理定律处处相同。

这个公理的意思是：不管观测者在流形上处于什么位置，他所观测到的局部物理量和物理定律总是完全相同的。由于观测者总是处在运动中，一个局部观测者在做实验时，其实是对流形的一个点列上的局部物理量和物理定律做连续观测，他的观测之所以产生结果就是因为物理量和物理定律在这个点列中的任何一点的一个开域上是完全相同的，这样，实验设备才能在一个有限的测量时间段中给出一个确定的结果。例如，观测自由落体运动时，观测者本身是随着地球、太阳系和银河系运动的，我们发现自由落体定律及实验测量的数据与地球、太阳系以至银河系的运动无关。我们称满足第一协变公理的物理量为局部可观测的。这个公理还意味着，如果一个物理定律的预测在流形的某一点上会实现，则该预测在流形的任一点上将会百分之百地实现。如果一个定律的预测只有百分之九十九的可能实现，那

么它不是物理定律。虽然这种定律可能同样是非常有趣的，但是本书不打算研究。

第二协变公理 1-8：流形上的局部物理量和局部物理定律分别满足 1-2 和 1-5。

满足第二协变公理的流形可以满足物理量和物理定律的唯一性公理，因此可以是整体可观测的。但是流形上的物理量和物理定律是局部不可观测的，因为随着观测者的运动，局部物理量和物理定律是变化的。这样的流形不是我们的主要讨论对象。

在本书的叙述中我们将沿用这样的记法，即：用$\{u, v, w, \cdots\}$表示元素为u、v、w等的一个集合；用$\{X_k\}$表示X_k，$k = 1, 2, \cdots, m$张成的一个空间；用$[u_.]$表示$u_.$对应的矩阵；用$[a_j^k]$表示以a_j^k为元素的一个矩阵。

第二章 微分流形

我们首先研究一下可逆的 m 维局部坐标变换，也就是同胚映射。令 $u:\{x^k\}\to\{y^k\}$，$v:\{y^k\}\to\{z^k\}$ 和 $w:\{z^k\}\to\{t^k\}$，其中

$$y^i = u^i(x^1, x^2, \cdots, x^m)$$
$$z^i = v^i(y^1, y^2, \cdots, y^m)$$
$$t^i = w^i(z^1, z^2, \cdots, z^m) \qquad i = 1,2,\cdots,m \tag{2-1}$$

我们可以把所有 m 维同胚映射构成的集合记为 $Diff = \{u, v, w, \cdots\}$，定义任意两个连续的同胚映射

$$vu:\{x^k\}\to\{y^k\}\to\{z^k\} \tag{2-2}$$

为 $Diff$ 上的乘法。$Diff$ 的元素作为同胚映射还具有性质：

1. $$(uv)w = u(vw) \tag{2-3}$$
2. 对任何 $u\in Diff$，存在 $u^{-1}\in Diff$，使
$$u^{-1}u = u\,u^{-1} = e \tag{2-4}$$
3. 这里 $e\in Diff$ 是恒等变换，e 满足
$$eu = ue = u \tag{2-5}$$
4. 由于 $Diff$ 是所有 m 维同胚映射构成的集合，如果 $v:\{x^k\}\to\{y^k\}$ 和 $w:\{y^k\}\to\{z^k\}$ 是 $Diff$ 的元素，则
$$u = wv \qquad u:\{x^k\}\to\{z^k\} \tag{2-6}$$
也是 $Diff$ 的元素。

按照定义[8]，$Diff$ 是群。如果任何 $u\in Diff$ 还是可微的，由链式法则，任何 $u\in Diff$ 的 Jacobi 矩阵 $\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\in T(Diff)$ 也满足上述性质 1 至 4，因此 $Diff$ 所有的 Jacobi 矩阵构成群 $T(Diff)$，$T(Diff)$ 上的乘法就是矩阵乘法。如果任何 $u\in Diff$ 是解析的，则 $Diff$ 和 $T(Diff)$ 是 Lie 群。

除了群 $Diff$ 以外，在局部欧氏空间上还有加法群 $Disp$，$Disp$ 是 Lie 群。更一般地还有群 $G = Diff \otimes Disp$，在第六章中我们将生成这些群。

定义 2-1：E：$\{\phi^j = 0, j = 1,2,3,\cdots\}$ 是所有微分方程构成的集合(包括 0 阶微分方程，也就是代数方程)，E 的一个元素 $\phi^j = 0$ 简记为 $\phi^j \in E$，E 的元素允许重复。

定义 2-2：设 ϕ 是 E 的一个子集，如果 $\phi^j = 0(\phi^j \in \phi \subset E)$ 都是线性方程，就说 ϕ 是线性的，否则就说 ϕ 是非线性的；如果 $\phi^j = 0$ 都是齐次方程，就说 ϕ 是齐次的，否则就说 ϕ 是非齐次的。

定义 2-3：如果 E 的子集 ϕ 中所有元素都是含 n 个自变量的微分方程，就说 ϕ 是 n 维的。

定义 2-4：设 ϕ 是 E 的一个子集，如果 ϕ 的元素最高涉及 r 阶导数，就说 ϕ 是 r 阶的；如果 ϕ 的元素最多可以积分 $r-p$ 次($p \leqslant r$)，就说 ϕ 是 p 阶可积的；如果 $p = 0$，就说 ϕ 是可积的。

定义 2-5：给定算子 O，如果，

$$O0 = 0 \tag{2-7}$$

就说 O 是齐次的；如果

$$O(a\omega + b\eta) = aO\omega + bO\eta \qquad a、b \in R$$

就说 O 是线性的；如果 O 只与它所作用的开域上的局部坐标有关，就说 O 是局部算子；如果 O^{-1} 存在，就说 O 是可逆的。

定义 2-6：E 的两个元素 $\eta = 0$ 和 $\psi = 0$ 是等价的，当且仅当唯一存在一个可逆的齐次算子 O 使得

$$O\eta = \psi = 0 \tag{2-8}$$

命题 2-7：等价关系具有对称性，自反性和传递性。

证明：由于 O 是可逆的，从 2-8 可以得到

$$\eta = O^{-1}\psi = O'\psi = 0 \tag{2-9}$$

这就证明了对称性。令 O_e 为恒等算子，则

$$O_e\eta = \eta = 0 \tag{2-10}$$

这就证明了自反性。设

$$O_1\eta = \psi = 0 \tag{2-11}$$

$$O_2\psi = \zeta = 0 \tag{2-12}$$

则有

$$\zeta = O_2\psi = O_2O_1\eta = O\eta \tag{2-13}$$

这说明传递性成立。**证完。**

按照定义，一个偏微分方程和一个常微分方程可以是等价的，不同阶的微分方程可以是等价的，线性微分方程和非线性微分方程也可以是等价的。如果两个微分方程都是可积的，等价就意味着它们的积分相同。E 可以按照是否等价划分为不同的等价类。

定义 2-8： 设 G 是一个群，E 的两个元素 $\phi^j=0$ 和 $\phi^k=0$ 之间如果有

$$u\phi^j = \phi^k \qquad u\in G \tag{2-14}$$

则称 ϕ^j 和 ϕ^k 是 G 连通的。

命题 2-9： G 连通具有对称性，自反性和传递性。

证明： 任何群元都是可逆的，从 2-14 可以得到

$$\phi^j = u^{-1}\phi^k = v\phi^k \quad u,v\in G \tag{2-15}$$

这说明 G 连通是对称的。设 e 是 G 的单位元

$$e\phi^j = \phi^j \quad e\in G \tag{2-16}$$

这说明 G 连通是自反的。令

$$u\phi^i = \phi^j \quad u\in G \tag{2-17}$$

$$v\phi^j = \phi^k \quad v\in G \tag{2-18}$$

则

$$\phi^k = v\phi^j = vu\phi^i = w\phi^i \quad w\in G \tag{2-19}$$

这就证明了传递性。**证完。**

给定不同的群 G，可以把 E 划分为不同的 G 连通子集。任意给定 G 连通子集中的一个元素，则其余的元素都可以通过 G 的群元变换得到。

E 的 G 连通子集 $\phi\subset E$ 中的每一个微分方程有相同的维数和阶

数以及可积性,而且要么都是偏微分方程,要么都是常微分方程;要么都是齐次的,要么都是非齐次的;要么都是线性的,要么都是非线性的。这是因为坐标变换不可能改变上述这些性质,如果 ϕ 的一个元素具有上述某个性质,则从 G 的群元定义的坐标变换所得到的 ϕ 的任何其他元素都将具有相同的性质。

上述群 G 和局部微分方程的集合 E 构成了微分流形的基本要素,我们可以据此赋予微分流形一个全新的、符合可观测性公理的定义。

定义 2-10:微分流形 M^m 是一组一一对应的偶对 $\{(u_j, \phi^j), j = 1,2,\cdots; u_j \in G, \phi^j \in \phi\}$,表示为 $M^m:(G,\phi)$,也可以简单表示为 M。

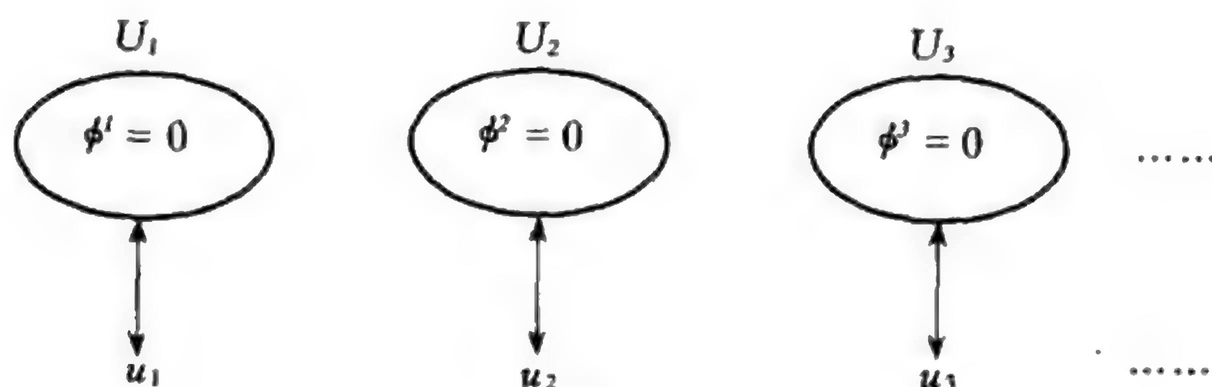


图 2-1

这里 $\phi = \{\phi^j\}, j = 1,2,\cdots$ 是 E 的一个 n 维子集,G 可以是 $Diff$、$Disp$ 或 $Diff \otimes Disp$ 或其子群,m 是 G 的维数,称 G 为 M^m 的结构群。ϕ 中每一个局部微分方程 $\phi^j = 0$ 定义在欧氏空间的一个开域 $U_j(U_j \subseteq R^m)$ 上,而每一个开域及其上的局部微分方程又对应 G 的一个唯一的元素 u_j。ϕ 的维数 n 一般不必等于 G 的维数 m。我们称子集 ϕ 的阶数 r 为流形的阶数;如果 ϕ 是 p 阶可积的,就说 M 是 p 阶可积的;如果 $p = 0$,我们说 M 是可积的。本书主要研究可积的流形,可积流形上所有局部微分方程的解存在且唯一。

定义 2-11:如果流形 $M(G_1, \phi)$ 和 $N(G_2, \psi)$ 的结构群同构,就

说 M 和 N 同构。

如果结构群 G_1 和 G_2 是 Lie 群，所谓同构指的是 G_1 和 G_2 有相同的 Lie 代数，也就是有相同的结构常数。

定义 2-12：设 $M:(G,\phi)$ 是 m 维流形，即 G 的维数是 m。若 G 是单连通的，就说 M 是单连通的；若 G 是紧致的，就说 M 是紧致的；若 G 为单纯 Lie 群，则 M 为单纯流形；若 G 为半单纯 Lie 群，则 M 为半单纯流形；若 H 是 G 的非平庸子群，ψ 是 ϕ 的与 H 对应的子集，则称 $N:(H,\psi)$ 是 $M:(G,\phi)$ 的一个子流形；若 H 为 G 的非平庸不变子群，则 $N:(H,\psi)$ 为 $M:(G,\phi)$ 的不变子流形；若 H 为 G 的一个有限不变子群，则称 N 为晶体。

理论上，一个 r 阶流形 M 上的函数至少应该是 C^r 的，因为 M 上的微分方程最高涉及 r 阶导数。设在开域 U 上有

$$\phi_U = 0, \qquad \phi_U \in \phi \tag{2-20}$$

在开域 V 上有，

$$\phi_V = 0, \qquad \phi_V \in \phi \tag{2-21}$$

为了使

$$u\phi_U = \phi_V \qquad u \in G \tag{2-22}$$

成立，显然 u 也必须至少是 C^r 的，这样 G 一般是 C^r 连续群。我们称之为流形的微分方程与结构群相容，相容性使得 C^r 作为一个流形性质在每一个开域上成立。在后面的章节中我们将从流形的局部微分方程直接生成流形的结构群，届时将看到二者的相容性自然而然成立。在以下的叙述中，我们称与结构群有关的流形性质为几何性质，与微分方程有关的流形性质为物理性质，与不同流形之间的映射有关的流形性质为拓扑性质。

按照广义函数理论，只要满足一些宽松的条件，任何物理量的分量函数可以向一个检测函数空间投影，于是对物理量的微分运算就被转移到检测函数空间上[2]。一个 r 阶流形 M 上的物理量至少是 C^r 的，如果张成检测函数空间的函数基底是 C^k 的，$k \in [r,\infty)$，那么

M 上的 C^j 物理量（$r \leqslant j \leqslant k$）可以向这组函数基底投影，因为这样得到的任何展开式都至少可以微分 j 次。如果张成检测函数空间的函数基底是 C^∞ 的，那么 M 上的任何物理量都可以向这组 C^∞ 的函数基底投影。常见的情形是我们并不知道 M 的阶数，但是可以肯定 M 上的物理量一定可以向 C^∞ 的检测函数空间投影。当然这有一个前提：物理量分量向检测函数空间投影得到的级数展开是一致收敛的，在以后的讨论中我们将看到，对于紧致可定向流形这是不成问题的。在第六章中我们还将看到 C^k 的检测函数空间生成 C^k 的 G，C^∞ 的检测函数空间生成 C^∞ 的 G，C^∞ 的 G 就是 Lie 群。必须指出，除非我们能够证明流形是 C^∞ 的，否则 C^∞ 的物理量和 C^∞ 的结构群仅仅是 C^r 流形的全部解的一个组成部分。另一方面，C^∞ 的物理量和 C^∞ 的结构群必然是 C^r 流形的全部解的一个组成部分，因此我们总是可以首先考虑求解流形的这一部分。实际上，这也是最重要的，最令我们感性趣的部分。

根据群论中的重排定理，用 G 的一个固定元素 $a \in G$ 遍乘 G 的所有元素，得到的是同一个群 G。但是这个操作会改变群元与流形上的开域之间的对应关系，特别是改变了 G 的单位元 e 所对应的开域。我们称这样的操作为流形上的一个运动或移动，若 a 从左方作用于 G，就称之为左移动，若 a 从右方作用于 G，就称之为右移动。

流形上有一个开域 U 具有特殊的重要性，在 U 上作用着 G 的单位元 e，我们称开域 U 为单位元开域。设 $\{x_0^i\}$ 是 U 上的局部坐标系，o 是这个坐标系的圆点。在物理上，o 点对应着观测者在 M 上所处的位置。在对 M 上任意一点 p 的开域上的物理定律进行观测实验的时候，我们总可以找到一个 $a \in G$，a 的左移动或右移动使得 p 点开域成为单位元开域，或者说 a 把观测者移动到点 p。这样一来，对流形任何开域上局部物理定律的观测都成为对单位元开域上局部物理定律的观测。显然，局部算子和张量运算不改变观测者在流形上的位置，只有 G 的一个左移动或右移动能改变观测者在流形上的位置。

定义 2-13：设观测者所在的单位元开域为 $U \subset R^m$，我们把 U 拓展到R^m，称这个 m 维欧氏空间为观测空间，记为 P^m。

设 $\Sigma:\{U_j\}$ 是流形上所有开域的集合，$\pi:\{\pi_j\}$ 是一个从属于 Σ 的单位分解。用 G 把所有的开域映射到P^m，再用单位分解拼接起来，得到的像集就是微分几何中定义微分流形时使用的拓扑点集 X，我们用 $u(M)$ 来表示

$$u(M) = \sum_j \pi_j u_j(U_j) \tag{2-23}$$

或

$$u(M) = \bigcup_j u_j(U_j) \tag{2-24}$$

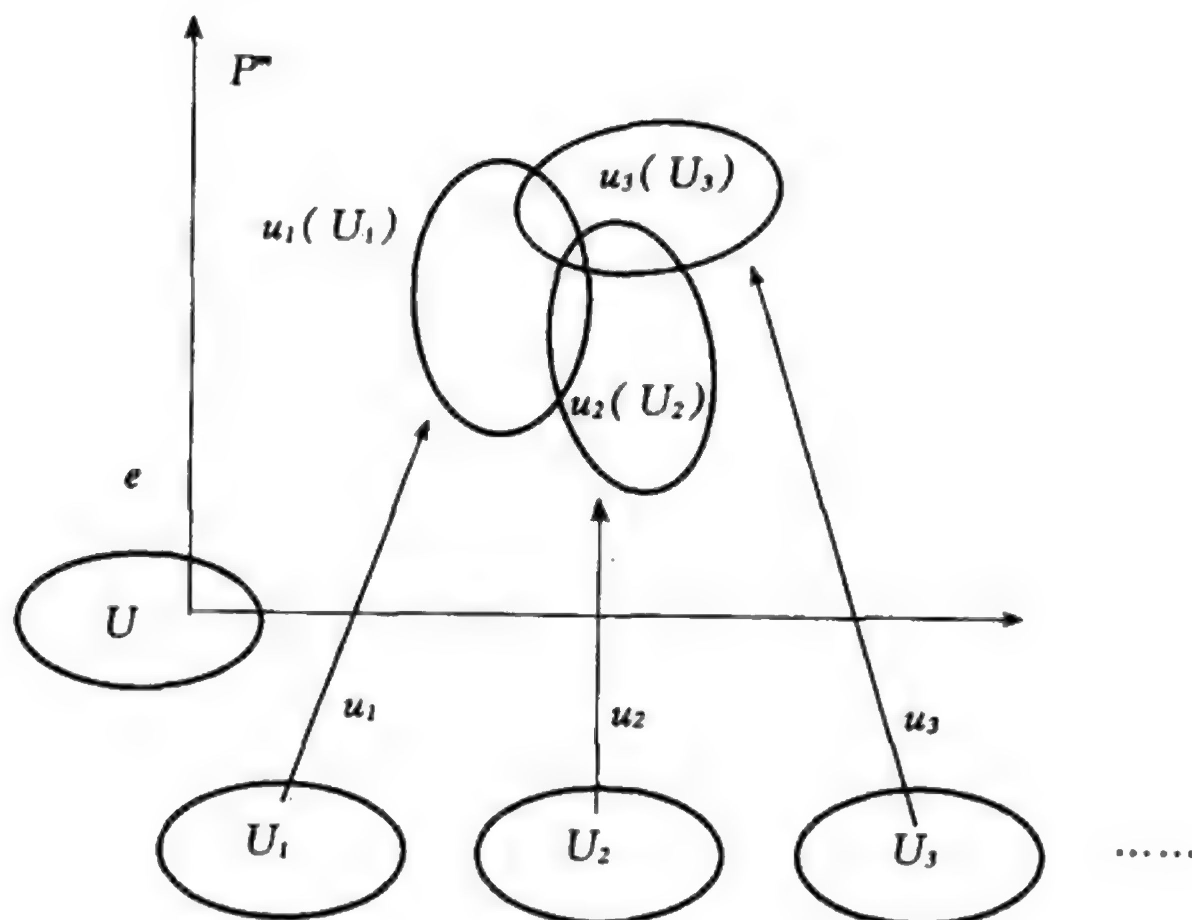


图 2-2

如果 $u(M)$覆盖整个 P^m，就说 M 是道路连通的，如果 $u(M)$不能覆盖整个 P^m，就说 M 是有洞的。$u(M)$就是观测者在 U 上看到的 M 的几何形状，一般地，$u(M) \subseteq P^m$。如果我们在每一个开域 U^j 上定义一些直线或平面，然后用 $u \in G$ 把这些直线或平面映射到 P^m 上去，就可以间接研究流形的几何性质。

任给 $u_j, u_k \in G, \phi^j, \phi^k \in \phi, \phi^j$ 和ϕ^k 分别定义在U_j 和U_k 上。令 $u_j(U_j), u_k(U_k) \subset P^m$ 是U_j 和 U_k 在P^m 上的像，如果 $u_j(U_j) \cap u_k(U_k) \neq \varnothing$，则一般地不存在一个 $v \in G$ 使得在$u_j(U_j) \cap u_k(U_k)$ 上

$$vu_j\phi^j = u_k\phi^k \tag{2-25}$$

成立，因此不满足物理量的可观测性。显然，用随便选取的一个子集 $\phi \subset E$ 定义的流形没有太大的物理意义。按照第一协变公理，一个物理上有意义的流形在任何开域上的局部物理定律是相同的，如果在所有开域上定义相同的几何坐标，任何群元 $u \in G$ 对应相同的局部微分方程，只是每个群元对应的开域不同。

定义 2-14：满足第一协变公理的流形是物理流形(图 2-3)。

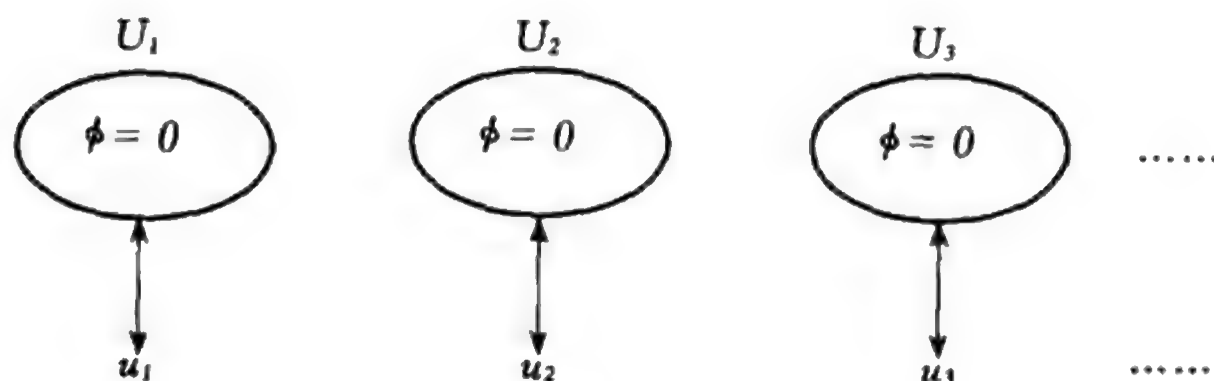


图 2-3

显然，物理流形上的物理量和物理定律无论整体还是局部都是可观测的，物理流形上的物理量(或物理定律)在观测空间中的像是由单位元开域上的局部物理量(或物理定律)和结构群生成的，或者说观测者在观测空间中看到的整体物理定律是由 E 的一个 G 连通子集拼接而成的，因此我们只须在单位元开域上研究局部物理定律就可以了。由于左移动和右移动改变观测者的位置，在物理流形上，无论观测者怎样运动，他所看到的局部物理量和物理定律是一样的，这意味着观测者无法在单位元开域上用实验确定自身的位置变化，这是我们熟知的物理事实。以下在不会发生误会时把物理流形简称

为流形，把整体可观测性和局部可观测性都简称为可观测性。

命题 2-15：常数是任何流形上的物理量。

$u \in G$ 是坐标变换，因此有

$$uC = C \qquad u \in G,\ C \in R \tag{2-26}$$

上式说明常数在任何流形上是可观测的，所以常数是任何流形上的物理量，我们称之为不变量。寻找流形上特有的不变量是我们的首要目标，因为每一个不变量都将对应一个 M 上的守恒定律。

设局部微分方程

$$\phi^j = 0 \tag{2-27}$$

的积分为

$$w^j(x^1, x^2, \cdots, x^m) = c^j \tag{2-28}$$

这里的常数 c^j 就是在求解微分方程的时候积分得到的积分常数。根据第一协变公理，流形所有开域上的局部物理定律是一样的，我们可以把 2-27 和 2-28 统一写为

$$\Phi = 0 \tag{2-29}$$

和

$$W = C \tag{2-30}$$

称 2-30 中的 W 为局部流形函数，若 $C \equiv 0$ 或 ∞，就说流形是奇异的。如果不特别指出，我们假定所讨论的流形都是非奇异的。必须强调的是：流形上的流形函数与 0 形式是完全不同的概念，在不可积流形上没有流形函数，但是有 0 形式。

设 $\Sigma:\{U_i\}$ 是流形上所有开域的集合，$\pi:\{\pi_j\}$ 是一个从属于 Σ 的单位分解。如果用 $u \in G$ 把所有开域上的流形函数映射到观测空间，则 W 以 π_j 为权的加和就拼接成一个处于 o 点的观测者所看到的流形

$$L = \sum_j \pi_j u_j(W) = C \tag{2-31}$$

2-31 式中的 L 是定义在 P^m 中的函数，称 L 为整体流形函数。如果我们用 G 把物理量 Φ 在所有开域上的限制映射到 P^m，并且用单位

分解拼接起来，得到的像集 $\Phi(u(M))$ 就是一个观测者在观测空间上看到的大范围内 Φ 的物理场。对物理量和物理定律作整体观测一定是在 P^m 上进行的。当一个观测者运动以后，他所看到的物理对象会发生变化，例如，在地球上看到的太阳和在冥王星上看到的太阳显然是不一样的。这并不是由于局部物理量不同所造成的，而是由于相同的局部物理量以不同的顺序拼接造成的。值得一提的是，尽管开域和单位分解扮演了重要角色，可是我们并没有把它们当作构成微分流形的基本要素，这是因为同一个流形可以有不止一种开覆盖和单位分解，而且流形上每一次左移动或右移动以后都要重新定义单位分解，它们不是流形最本质的东西。

给微分流形一个全新的定义很可能是得不偿失的，因为这需要重新证明一大批定理来支撑新的流形理论，这是数学家才能承担的工作。幸好我们关于流形的新定义与旧定义并无本质区别，现在我们来比较一下新旧两个定义：首先，二者都认为流形是局部欧氏的，不同的是在旧定义[20],[1] 中我们先有一个点集 X 和覆盖 X 的一组开集，然后通过微分同胚映射得到欧氏空间中的开域。而在新定义中我们以局部欧氏空间中的开域为出发点，通过结构群 G 映射得到 P^m 上的点集 $u(M)$。既然 G 总是可逆的，这两种定义方法就是等价的；其次，旧定义从几何点集出发，强调的是流形的几何特性。新定义从开域上的局部微分方程出发，强调的是流形的物理特性。相比之下，新定义显得自然地多，因为点集 $u(M)$ 作为欧氏空间的微分同胚映射的像显然具有第二可数的，Hausdorff 的和局部紧的性质，而且相容映射 $u \in G$ 的可微性取决于局部微分方程的阶数，这在逻辑上也是顺理成章的；此外，旧定义要单独为流形定义联络结构和度量结构[20],[1]，而在新定义中，我们将从局部微分方程和 Lie 代数生成结构群，再从结构群导出联络和度量，所以二者在结构上并无区别；与旧定义相比，新定义中的局部开域以及开域上的局部坐标就构成一张图，所有图的集合就是图册。可见，二者在本质上是相同的，我们仍然

可以直接引用微分几何中的所有定理。新旧定义的区别仅仅是技术性的：新定义从局部欧氏空间中的开域出发，因此 U_i 代表R^m 上的开域，$u(U_i)$ $u \in G$ 代表$u(M)$ 上的开集；而旧定义从 X 上的开集出发，因此 U_i 代表X 上的开集，$\phi(U_i)$ 代表 R^m 上的开域，这一点需要在阅读文献的时候注意。

前面我们已经提到 M 上的一个左移动使得G 的群元与开域之间的对应关系改变，但是对于满足第一协变公理的物理流形，由于每一个开域上的局部物理量和微分方程是一样的，左移动前后 G 的群元也是一样的，对应关系的改变并不产生任何差异。我们可以对右移动作类似的讨论，因此有

命题 2-16：流形上的物理量和物理定律是运动不变的。

既然物理量与开域的局部对应关系在移动前后是一样的，如果两个物理量仅相差一个左移动或右移动，我们就认为二者是同一个物理量。

尽管在移动前后群元与局部物理量和物理定律的对应关系不变，群元与开域的对应关系改变了，因为每一个开域的大小和形状可以是不一样的，这些改变了对应顺序的开域会在 P^m 上拼接出不同的像，导致我们在地球上和在冥王星上看到的太阳不相同。但是这些并不会影响我们的结论，因为开域的拼接用到单位分解，而单位分解不是流形定义的要素之一。此外，在第九章我们还将看到，流形上的运动不改变物理量的积分，这也说明运动前后得到同一个物理量。

定义 2-17：不变算子 O 是作用在物理量上的局部可逆算子，O 把流形的任何开域上的局部物理定律映射为相同开域上等价的物理定律，把局部物理量映射为相同开域上的局部物理量。

物理量在开域上的限制是局部函数，只有当 O 是局部算子时，O 作用于一个局部函数才得到另一个局部函数，所以 O 只与我们所讨论的开域上的局部坐标有关，而与其余开域上的坐标无关。显然，线性不变算子作用在线性物理量上仍然得到线性物理量。

命题 2-18：算子 O 是不变算子的充要条件是 O 满足，

$$[u\ ,O] = 0 \qquad u \in G \tag{2-32}$$

证明：设 ϕ_U 是物理量 ϕ 在单位元开域 U 上的限制，我们得到 $O\phi$ 在 U 上的限制为 $O\phi_U$。由于 ϕ 和 $O\phi$ 都是物理量，还可以先用 u 把 ϕ_U 映射到任意开域 V，在 V 上用局部算子 O 作用之，再用 u^{-1} 映射回 U，因此 $O\phi$ 在 U 上的限制又可以写成 $(u^{-1}Ou)\phi_U$，根据物理量的唯一性公理有

$$O\phi_U = (u^{-1}Ou)\phi_U \tag{2-33}$$

ϕ 是任意物理量，所以

$$O = u^{-1}Ou \tag{2-34}$$

整理可得 2-32。反之，逆推回去可以证明 $O\phi$ 满足唯一性公理，是物理量。证完。

命题 2-19：一阶全微分算子和一阶全导数算子是不变算子。

从 R^m 中的微分学我们知道一阶全微分在坐标变换下是不变的，因而是物理量。但是高阶全微分不具有这种不变性，因而不是物理量。例如，给定 M 的流形函数 W

则 $$W = C \qquad C \in R \tag{2-35}$$

和 $$\mathrm{d}W = \frac{\partial W}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j = 0 \tag{2-36}$$

是 M 上的物理定律，而

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k = 0 \tag{2-37}$$

不是物理定律。2-35 与 2-36 是等价的。如果把 2-36 的左端当作标量函数，就可以继续进行一阶全微分，

$$\mathrm{d}^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k + \frac{\partial W}{\partial x^j}\mathrm{d}^2 x^j = 0 \tag{2-38}$$

2-38 也是 M 上的物理定律。如果 $x^k = x^k(t)$ 是 M 上的一条曲线，上式也可以写成二阶导数的形式，

$$\frac{\mathrm{d}^2 W}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial W}{\partial x^j}\frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{2-39}$$

全微分和全导数仅相差分母上的 $\mathrm{d}t$，为了避免混淆全微分算子与外微分算子，我们不再使用全微分算子，符号 d 仅用于表示外微分。只使用全导数算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，全微分可以从全导数得到。

命题 2-20：设有 M 上的矢量 X，u 是 X 生成的局部单参数 Lie 群，T 是 M 上的物理量，则 T 的 Lie 导数[20][21]

$$L_X T = \lim_{t\to 0}\frac{[uT(x) - T(x)]}{t} = u^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[uT(x)] \tag{2-40}$$

是物理量，L_X 是不变算子

证明：T 是物理量，T 的一个左移动 uT 也是物理量，根据命题 2-19，全导数算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是不变算子，所以$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[uT(x)]$ 还是物理量。最后，u^{-1} 的一个左移动仍然是物理量，因此 $L_X T$ 是物理量。按照定义 2-17。L_X 是不变算子。**证完**。

按照第一协变公理，物理量在所有开域上是相同的，不管开域对应 G 的哪一个群元，因此定义 2-40 对 G 的单位元 e 也成立。

$$u^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[uT(x)] = e^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[eT(x)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[T(x)] \tag{2-41}$$

$$\Rightarrow [u, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}] = 0 \tag{2-42}$$

可见 Lie 导数的实质就是全导数。

不变算子是一个标量算子。设$\{\Lambda_k\}$是 r 个可逆算子组成的算子集，我们可以把不变算子的定义拓展到$\{\Lambda_k\}$上，

$$u\Lambda_k u^{-1} = \Lambda_k \qquad k = 1,2,\cdots,r \tag{2-43}$$

注意到流形上的物理定律和物理量是运动不变的，也就是说，任给物理量 Φ 和 $a \in G$，设$[a.]$是 a 的一个 r 维表示，则 $\Lambda_k\Phi$ 与$[a.]\Lambda_k\Phi$ 是同一个物理量。因此我们可以进一步拓展不变算子的定义为

$$u\Lambda_k u^{-1} = [a\,.\,]\Lambda_k \tag{2-44}$$

定义 2-21：2-44 定义的算子是张量算子[6]。如果$[a\,.\,]$是不可约表示，Λ_k 是不可约张量算子。不变算子是张量算子的一个特例。

定义 2-22：E 的两个 G 连通子集 ϕ：$\{\phi^i = 0\}$ 和 ψ：$\{\psi^j = 0\}$ 中的元素若存在一个由张量算子 O 定义的一一对应的关系 $\{O\phi^i = \psi^j\}$，就说 ϕ 和 ψ 是等价的。E 的所有 G 连通子集可以按是否等价划分为不同的等价类。

显然，互相等价的子集具有相同的维数，相同个数的元素。容易证明这个定义也具有对称性，自反性和传递性。E 的两个可积的 G 连通等价子集的局部微分方程的积分对应相同。

把 G 连通与物理量和物理定律的可观测性比较可知，物理量是定义在流形上的 G 连通的函数及其微分，物理定律是定义在流形上的 E 的 G 连通子集。流形上可以有许多物理量和许多等价的物理定律，它们就是 E 的所有 G 连通等价子集。在实际应用中经常碰到的是在一个流形上寻找等价的线性物理定律，这会使问题变得容易求解。

在微分几何中，我们常常随口说“设 ϕ 和 ψ 是 M 上的张量……”，但是却无法判断给定的 ϕ 和 ψ 是否确实是某个已知流形上的张量，甚至无法判断 ϕ 和 ψ 是否是同一个流形上的张量。在这里我们有：

定义 2-23：我们说 ϕ：$\{\phi^i = 0\}$ 和 ψ：$\{\psi^j = 0\}$ 是同一个流形上的物理定律，当且仅当 ϕ 和 ψ 是等价的 G 连通子集；如果存在一个局部张量算子 O 使得在每一个开域 U_j 上有

$$O\phi^i = \psi^j \tag{2-45}$$

我们就说 ϕ：$\{\phi^i\}$ 和 ψ：$\{\psi^j\}$ 是同一个流形上的物理量。

定义 2-24：流形 $M(G,\phi)$ 的一个开域 U_j 上的切空间 $T(U_j)$ 是指定义在 U_j 上所有一阶、齐次、线性、与 ϕ 等价的偏微分方程的集合。称任何 $Z \in T(U_j)$ 为 $T(U_j)$ 上的一个矢量。用 $u \in G$ 把所有

的 $Z \in T(U_j)$ 映射到观测空间，把拼接得到的整体切空间表示为 $T(M)$。

如果 $Z \in T(U_j)$，f 是非零函数，则 fZ 与 Z 等价，所以 $fZ \in T(U_j)$。更进一步，如果 Z_k span $T(U_j)$，$[\bar{A}_k^i(x)]$ 是非奇异函数矩阵，则 $\bar{A}_k^i(x)Z_i$ 与 Z_k 等价，所以 $\bar{A}_k^i(x)Z_i$ span $T(U_j)$。显而易见，$T(U_j)$ 不是一个线性空间，而是所谓 F^0 线性空间。

定义 2-25：流形 $M(G,\phi)$ 的一个开域 U_j 上的余切空间 $T^*(U_j)$ 是指定义在 U_j 上所有一阶、齐次、与 ϕ 等价的 Pfaff 微分方程的集合。称任何 $\eta \in T^*(U_j)$ 为 $T^*(U_j)$ 上的一个 1 形式。用 $u \in G$ 把所有的 $\eta \in T^*(U_j)$ 映射到观测空间，把拼接得到的整体余切空间表示为 $T^*(M)$。

如果 $\eta \in T^*(U_j)$，f 是非零函数，则 $f\eta$ 与 η 等价，所以 $f\eta \in T^*(U_j)$。更进一步，如果 η^k span $T^*(U_j)$，$[A_i^k(x)]$ 是非奇异函数矩阵，则 $A_i^k(x)\eta^i$ 与 η^k 等价，所以 $A_i^k(x)\eta^i$ span $T^*(U_j)$。显而易见，$T^*(U_j)$ 不是一个线性空间，而是所谓 F^0 线性空间。

从微分几何我们知道，对任何 $X, Y \in T(M)$ 和 $\eta \in T^*(M)$ 有

$$d\eta(X,Y) = X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \tag{2-46}$$

这个公式是非线性的，把它作为 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 之间的对偶是很不方便的，给我们的研究带来困难。更重要的是 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 不是线性空间，而我们手中几乎所有数学工具都是针对线性空间的。例如我们知道 Lie 代数的定义有三条，那就是 Lie 代数上的对易子满足线性性、反对称性和 Jacobi 性。$T(M)$ 上的矢量除了不满足线性性以外满足剩下的两条。

命题 2-26：可积流形的余切空间 $T^*(M)$ 必有线性子空间 $\mathfrak{g}^*(M)$ 满足

$$d\vartheta^i = -\frac{1}{2}C_{jk}^i\vartheta^j \wedge \vartheta^k$$

$$C^i_{jk} \in R, \quad \vartheta^k \text{ span } \mathfrak{g}^*(M) \subset T^*(M) \tag{2-47}$$

证明：令 η^j span $T^*(M)$, $j = 1, 2, \cdots, m$，由于 $T^*(M)$ 是可积的，根据 Frobenius 可积性定理，η^j 满足

$$d\eta^j = \omega^j_n \wedge \eta^n \tag{2-48}$$

其中 ω^j_n 是 m^2 个联络 1 形式。我们试图证明存在非奇异变换

$$\eta^j = A^j_k \vartheta^k \tag{2-49}$$

$$\vartheta^k = \bar{A}^k_j \eta^j \tag{2-50}$$

$$A^k_j \bar{A}^i_k = \delta^i_j \tag{2-51}$$

外微分 2-49 可得

$$d\eta^j = dA^j_k \wedge \vartheta^k + A^j_k d\vartheta^k \tag{2-52}$$

把
$$d\vartheta^k = -\frac{1}{2} C^k_{is} \vartheta^i \wedge \vartheta^s = -\frac{1}{2} C^k_{is} \bar{A}^i_t \bar{A}^s_u \eta^t \wedge \eta^u \tag{2-53}$$

和 2-52 代入 2-48，

$$d\eta^j = dA^j_k \bar{A}^k_r \wedge \eta^r - \frac{1}{2} A^j_k C^k_{is} \bar{A}^i_t \bar{A}^s_u \eta^t \wedge \eta^u = \omega^j_n \wedge \eta^n \tag{2-54}$$

或
$$[dA^j_k \bar{A}^k_n - \frac{1}{2} A^j_k C^k_{is} \bar{A}^i_t \bar{A}^s_n \eta^t - \omega^j_n] \wedge \eta^n = 0 \tag{2-55}$$

η^n 是 F^0 线性无关的，因此

$$dA^j_k \bar{A}^k_n - \frac{1}{2} A^j_k C^k_{is} \bar{A}^i_t \bar{A}^s_n \eta^t - \omega^j_n = 0 \tag{2-56}$$

其中
$$\eta^t = a^t_u dx^u \quad \omega^j_n = b^j_{nu} dx^u \tag{2-57}$$

是已知的，最后得到

$$\frac{dA^j_k}{dt} = [\frac{1}{2} A^j_n C^n_{ik} \bar{A}^i_t a^t_u + b^j_{nu} A^n_k] \frac{dx^u}{dt} \tag{2-58}$$

对于任何已知曲线

$$x^u = x^u(t) \tag{2-59}$$

2-58 是关于 $A^k_j(x)$ 的常微分方程组，只要 2-58 的右端满足 Lipschitz 条件就存在局部的唯一解。可见，对任何给定的 2-48，必可解出

$A_j^k(x)$，进而得到 ϑ^k 使得2-47成立。通常 η^i 和ω_n^i 都满足Lipschitz条件，因此 2-58 有唯一解的充分必要条件是

$$\det[A_j^k(x)] \neq 0 \tag{2-60}$$

如果对给定的结构常数最终不能求出 2-58 的解，那就说明给定流形的结构群不能从这组结构常数对应的 Lie 代数生成，我们可以换维数相同的另外一个 Lie 群的结构常数来求解 2-58。显然，把 $C_{jk}^i \equiv 0$ 代入 2-58 是一定有解的。我们知道 ϑ^k 其实是 Lie 群的 Maurer – Cartan 形式，$\{\vartheta^k\}$ 确实张成线性空间。**证完。**

反之，给定 $\mathfrak{g}^*(M)$ 也可以扩展得到 $T^*(M)$。许多运算，例如张量积，在 $T^*(M)$ 上也成立，但是我们主要在$\mathfrak{g}^*(M)$ 上讨论问题。因为只要把 $\mathfrak{g}^*(M)$ 研究清楚了，也就完全弄清了 $T^*(M)$，我们称 $\mathfrak{g}^*(M)$ 是 $T^*(M)$ 的核或余速度空间。

命题 2-27：可积流形的 $T(M)$ 必有与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 对偶的线性子空间 $\mathfrak{g}(M)$ 满足

$$[X_j, X_k] = C_{jk}^i X_i$$

$$C_{jk}^i \in R \quad X_j \text{ span } \mathfrak{g}(M) \subset T(M) \tag{2-61}$$

证明：设有 X_j 满足

$$< \vartheta^k, X_j > = \vartheta^k(X_j) = \delta_j^k \tag{2-62}$$

从公式

$$d\vartheta^i(X_j, X_k) = X_j\vartheta^i(X_k) - X_k\vartheta^i(X_j) - \vartheta^i([X_j, X_k]) \tag{2-63}$$

可得 $$d\vartheta^i(X_j, X_k) = -\frac{1}{2}C_{mn}^i\vartheta^m \wedge \vartheta^n(X_j, X_k)$$

$$= - C_{jk}^i = - \vartheta^i([X_j, X_k]) \tag{2-64}$$

可见，如果 $X_j \in \mathfrak{g}(M)$，则$[X_j, X_k] \in \mathfrak{g}(M)$，$\mathfrak{g}(M)$ 是一个 Lie代数，称 $\mathfrak{g}(M)$ 为 $T(M)$ 的核或速度空间，$\mathfrak{g}(M)$ 就是生成 G 的 Lie 代数。**证完。**

$\mathfrak{g}(M)$ 与 $T(M)$ 之间相差一个满秩变换，所以有

$$\dim \mathfrak{g}(M) = \dim T(M) = \dim \mathfrak{g}^*(M) = \dim T^*(M) \tag{2-65}$$

设 Z^k span $T(M)$，如果 M 可积，则

$$[Z_j, Z_k] = K^i_{jk} Z_i \tag{2-66}$$

其中 K^i_{jk} 是M上的局部函数，任何 $Z \in T(M)$ 可以生成一个单参数子群，在第六章中我们将看到，不同的 $Z_1, Z_2 \in T(M)$ 生成互相不连通的单参数子群，这样的子群只能是一维流形的结构群，在一个 $m > 1$ 的流形 M 上，借助于这样的单参数子群，一个理论上站在 Z 的一条特征线上的观测者只能看到这条特征线上的物理场，也就是说 Z 的单参数子群不可能在P^m 上拼接出一个物理量的 m 维整体图像。因此，$Z \in T(M)$ 生成的单参数子群不是 M 上的结构群的子群。

第三章　流形上的全微分对偶

我们把 $\mathfrak{g}(M)$ 上的基底写作

$$X_j(W) = \bar{a}_j^{\gamma} \frac{\partial W}{\partial x^{\gamma}} = 0$$

$$j = 1,2,\cdots,m; \gamma = 1,2,\cdots,n \tag{3-1}$$

如果 $m = n$，从微分几何我们知道 $\left\{\frac{\partial W}{\partial x^i}\right\}$ 也能构成一组线性无关的基底，$\frac{\partial W}{\partial x^i}$ 构成线性无关的基底的充要条件是

$$\det[\bar{a}_j^i] \neq 0 \tag{3-2}$$

按照惯例，我们称 $\left\{\frac{\partial W}{\partial x^i}\right\}$ 为自然基底，自然基底是 $T(M)$ 上的基底。称 $\bar{a}_j^i$ 为逆变基底矩阵。

在 R^m 上的微分学中，如果采用正交的几何坐标

$$\frac{\partial W}{\partial x^j} \mathrm{d}x^k \qquad j \neq k \tag{3-3}$$

是无意义的，我们定义

$$\frac{\partial W}{\partial x^j} \mathrm{d}x^k \equiv 0 \qquad j \neq k \tag{3-4}$$

定义 3-1：非奇异可积流形局部开域上的全微分

$$\int \frac{\partial W}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i = \int \frac{\partial W}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i = \int \mathrm{d}W = W = C \tag{3-5}$$

如果流形非奇异，不失一般性，令 $C = 1$。定义全微分对偶

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \mathrm{d}x^j \right\rangle = \left\langle \mathrm{d}x^j, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle = \int \delta_i^m \frac{\partial W}{\partial x^m} \otimes \delta_n^j \mathrm{d}x^n$$

$$= \int (\delta_i^m \otimes \delta_n^j)\left(\frac{\partial W}{\partial x^m} \otimes \mathrm{d}x^n\right) = \int (\delta_i^n \otimes \delta_n^j)\left(\frac{\partial W}{\partial x^n} \otimes \mathrm{d}x^n\right)$$

$$= \delta_i^j \int \mathrm{d}W = \delta_i^j \tag{3-6}$$

注意 3-5 和 3-6 式中的积分是不定积分。由于一阶全微分是不变的，或者说全微分在 M 所有开域上的局部限制构成一个局部微分方程的 G 连通子集，因此上述全微分对偶是物理定律，W 就是M 上的流形函数，3-6 对 M 上的任何开域成立。当流形非奇异时，由 3-6 诱导的映射可以定义 $\mathfrak{g}(M)$ 的对偶基底，

定义 3-2：$\mathfrak{g}(M)$ 的对偶空间 $\mathfrak{g}^*(M)$ 由 m 个 Pfaff ϑ^i 张成。

$$\vartheta^i = a_j^i \mathrm{d}x^j = 0 \tag{3-7}$$

$$a_j^i \bar{a}_i^k = \bar{a}_i^k a_j^i = \delta_j^k \tag{3-8}$$

定义 3-3：局部函数矩阵 $A = [a_j^i(x)]$ 为开域 U 上的基底矩阵。

定义 3-4：$T(M)$ 与 $T^*(M)$ 之间的对偶为 2-46，$\mathfrak{g}(M)$ 与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 之间的对偶或者缩并为

$$\vartheta^k(X_j) = \langle X_j, \vartheta^k \rangle = \langle \vartheta^k, X_j \rangle = \int X_j(W) \otimes \vartheta^k$$

$$= \delta_j^k \int \frac{\partial W}{\partial x^i} \mathrm{d}x^i = \delta_j^k \tag{3-9}$$

实际上在公式2-62中我们已经引用了3-9，只是未指明而已。全微分对偶就是自然基底$\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ 与$\{\mathrm{d}x^k\}$ 之间的缩并。显然，3-9 也是 M 上的物理定律。

命题 3-5：对任意 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 和 $\omega \in \mathfrak{g}^*(M)$，

$$\langle X, \omega \rangle = i_X \omega = \text{const} \tag{3-10}$$

证明：由于 $\mathfrak{g}(M)$ 与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 都是线性空间，设

$$X = \beta^k X_k \quad \beta^k \in R$$

$$\omega = \alpha_j \vartheta^j \quad \alpha_j \in R \tag{3-11}$$

$$\langle X, \omega \rangle = \langle \beta^k X_k, \alpha_j \vartheta^j \rangle = \beta^k \alpha_k \in R$$

$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 之间一般没有这个性质。**证完。**

利用 3-9 式可以求出物理量在给定基底下的分量，例如，

$$\langle \omega, X_j \rangle = a_k \langle \vartheta^k, X_j \rangle = a_k \delta_j^k = a_j \tag{3-12}$$

用自然基底可以求出物理量在自然基底下的分量，例如，

$$\omega = a_j(x)\mathrm{d}x^j \qquad \omega \in \mathfrak{g}^*(M) \tag{3-13}$$

$$\begin{aligned}
\langle \omega, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle &= \langle a_k(x)\mathrm{d}x^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \\
&= \int (a_k(x) \otimes \delta_j^i)(\frac{\partial W}{\partial x^i} \otimes \mathrm{d}x^k) \\
&= \int a_j \mathrm{d}W = a_j W - \int W \mathrm{d}a_j \\
&= a_j W - \int W u^{-1} \mathrm{d}(u a_j) \\
&= a_j W - \int W L_X a_j \mathrm{d}t \qquad u \in G
\end{aligned} \tag{3-14}$$

在公式 3-14 的推导过程中我们假定微分算子 d 是不变算子。如果流形是可积的，$W = C = 1$。考虑到我们将在第九章给出的公式 9-26，有

$$\langle a_k(x)\mathrm{d}x^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle = a_j(x) \tag{3-15}$$

可见，只有当流形是可积的时候我们才可以用全微分对偶的方法求出张量在自然基底下的分量函数。

注意到 $\mathfrak{g}(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(M)$ 在 G 变换下的性质，$\omega^k \in \mathfrak{g}^*(M)$ 和 $X_i(W) \in \mathfrak{g}(M)$ 就是古典张量几何中定义的一阶协变张量和一阶逆变张量，除此之外，$\omega^k = 0$ 和 $X_i(W) = 0$ 还是 M 上的一阶齐次线性物理定律，X_j 是一个微分算子，所有的 X_j 构成空间 $\partial(M)$。空间 $\partial(M)$ spanned by X_j 与 $\mathfrak{g}(M)$ spanned by $X_j(W)$ 是完全不同的。首先，$\partial(M)$ 是一个算子空间，而 $\mathfrak{g}(M)$ 是一阶线性齐次偏微分方程的集合；其次，在 $\partial(M)$ 上的乘法是对易子运算，而在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的乘法是我们所熟知的张量乘法。但是这两个空间在某些方面又是相近的。

例如，它们的元素在 U_j 上的限制具有相近的表达（有完全相同的基底矩阵）；以及它们在同胚映射下具有完全相同的变换性质。更重要的是在讨论中我们决不会把二者混淆起来，因为当讨论张量运算时决不用考虑对易子运算。反之，当讨论可积性时也不会用到张量积。因此我们按通常的习惯，把二者都表示为

$$X_j = \bar{a}_j^\gamma \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \tag{3-16}$$

只是在心中时刻记住 $\partial(M)$ 和 $\mathfrak{g}(M)$ 的区别。

第四章　微分流形的线性化

设 $T^*(M)$ 由 m 个 Pfaff

$$\eta^k = a_j^k \mathrm{d}x^j = 0 \tag{4-1}$$

张成。4-1 可以写成

$$\beta^k = a_j^k \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4-2}$$

上式左端可以看作一个函数，用全导数算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$作用于上式得到

$$a_j^i \frac{\mathrm{d}^2 x^j}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4-3}$$

如果

$$\det[a_j^i] \neq 0 \tag{4-4}$$

可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^l}{\mathrm{d}t^2} + \bar{a}_i^l \frac{\partial a_j^i}{\partial x^k} \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{4-5}$$

还可以继续把 4-5 式的左端看作标量函数，用全导数算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$作用之，于是我们有：

命题 4-1：M 上的任意 r 阶导数$\frac{\mathrm{d}^r x^l}{\mathrm{d}t^r}$均可以表示为一阶导数$\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}t}$的 r 次乘积的组合，组合系数为 a_i^l 和 $\bar{a}_j^i$ 及其导数。

定义 4-2：设 β^j 如式 4-2 所定义，则称

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} b_{j_1 \cdots j_n} \beta^{j_1} \otimes \cdots \otimes \beta^{j_n} \quad b_{j_1 \cdots j_n} \in R \tag{4-6}$$

为张量级数，称

$$L = 0 \tag{4-7}$$

为张量级数定律。

命题 4-3：可积流形上的常微分方程形式的物理定律必可展开

为张量级数定律。

证明:设单位元开域上的局部微分方程是:

$$f(\frac{dx^1}{dy},\cdots,\frac{dx^{m-1}}{dy};\cdots;\frac{d^rx^1}{dy^r},\cdots,\frac{d^rx^{m-1}}{dy^r})=0 \tag{4-8}$$

由于任何微分总可以化为关于时间的微分,例如:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dx}{dt}\frac{1}{\frac{dy}{dt}},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{(\frac{dy}{dt})^2}[\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{1}{\frac{dy}{dt}}\frac{d^2y}{dt^2}],\cdots \tag{4-9}$$

令 $dx^m=dy$,我们总可以把 4-8 写成

$$f'(\frac{dx^1}{dt},\cdots,\frac{dx^m}{dt};\cdots;\frac{d^rx^1}{dt^r},\cdots,\frac{d^rx^m}{dt^r})=0 \tag{4-10}$$

考虑到命题 4-1,4-10 可以写成

$$F(\frac{dx^1}{dt},\cdots,\frac{dx^m}{dt})=0 \tag{4-11}$$

按照定义 1-4,物理定律只是物理量的函数,4-11 中的 F 仅仅与一阶基底有关,因此 F 仅是 1 阶和 0 阶张量的函数。我们只能把 F 写成 0 阶张量与等价于 F 的一阶张量 β^j 的乘积的函数,其他的写法都将使展开得到的张量级数与 F 不等价。而 1 阶和 0 阶张量的乘积仍然是 $T^*(M)$ 上的一阶张量,因此可以认为 F 仅是 1 阶张量的函数。于是 4-11 可以写成

$$\phi(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^m)=0 \tag{4-12}$$

其中 β^j 的定义见 4-2。把 β^j 看作变量,对 4-12 在 $\beta^j=0$ 点作 Taylor 展开

$$\phi(\beta^1,\beta^2,\cdots,\beta^m)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[\beta^1\frac{\partial}{\partial\beta^1}+\beta^2\frac{\partial}{\partial\beta^2}+\cdots+\beta^m\frac{\partial}{\partial\beta^m}]^n\phi\Big|_{\beta^j=0}=0 \tag{4-13}$$

由于
$$\frac{\partial\phi}{\partial\beta^j}\Big|_{\beta^j=0}\in R \qquad j=1,2,\cdots,m \tag{4-14}$$

4-13 确实是一个张量级数。**证完。**

$\mathfrak{g}(M)$ 与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 之间的对偶，以及 $\mathfrak{g}(M)$ 与 $T(M)$、$\mathfrak{g}^*(M)$ 与 $T^*(M)$ 之间的满秩映射，确定了一个同胚映射 $F: T^*(M) \to T(M)$，在 4-13 中，逐一地把 $\beta^j \in T^*(M)$ 映射为 $\alpha^j \in T(M)$，就得到偏微分方程形式的张量级数定律。由于映射是一对一的，所以

命题 4-4：任何偏微分方程形式的物理定律也可以表示为张量级数定律。

$$\phi(\alpha_1\alpha_2, \cdots, \alpha_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \cdots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m}]^n \phi \Big|_{\alpha_j = 0} = 0 \tag{4-15}$$

$$\alpha_j = \bar{a}_j^k \frac{\partial W}{\partial x^k} \tag{4-16}$$

命题 4-5：设 $\phi = 0$ 是 $M(G, \phi)$ 上的局部物理定律，令

$$\alpha = a^j \alpha_j \quad a^j \in R \tag{4-17}$$

α 是 $T(M)$ 中的元素，与 ϕ 等价，则必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \cdots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m}]^n \phi \Big|_{\alpha_j = 0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(\alpha)^n \tag{4-18}$$

证明：由于 α 与 ϕ 等价，注意到 $(\alpha)^n$ 是线性无关的基底，所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(\alpha)^n = 0 \tag{4-19}$$

与 ϕ 等价。按照命题 4-4，4-19 一定可以表示为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \cdots + \alpha_m \frac{\partial}{\partial \alpha_m}]^n \phi \Big|_{\alpha_j = 0} = 0 \tag{4-20}$$

反之，根据物理量的唯一性公理，4-20 也一定可以唯一表示为等价的 4-19 的形式。**证完。**

类似地有

命题 4-6:设 ϕ 是 $M(G,\phi)$ 上的局部物理定律,

$$\beta = a_j\beta^j \qquad a^j \in R \tag{4-21}$$

是 $T^*(M)$ 中的元素,与 ϕ 等价,则必有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left[\beta^1 \frac{\partial}{\partial\beta^1} + \beta^2 \frac{\partial}{\partial\beta^2} + \cdots + \beta^m \frac{\partial}{\partial\beta^m}\right]^n \phi \Bigg|_{\beta^j=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!}(\beta)^n \tag{4-22}$$

至此,任何非线性物理定律都可以化为一组等价的一阶张量的张量积。这样,一个由非线性微分方程定义的物理定律就可以化为一组等价的线性或多重线性的张量定律。考虑到第一协变公理,张量定律在流形上任何一个开域都成立,这样就把流形上的非线性问题线性化了,我们只要分别解出各阶张量,就最后解出了物理问题。注意到张量定律在 G 变换下和不变算子作用下的性质,如果我们在单位元开域 U 上使用张量工具和不变算子,那么得到的结论将适用于流形上的任意开域以及整个观测空间 P^m。今后如不特别指出,我们总是在单位元开域上讨论问题。

把物理定律展开为收敛的张量级数,要求物理定律是解析的,这就可能把那些非解析的物理定律排除在外了。当然我们也可以把物理定律展开为一个有限的张量级数和,舍弃高阶项,只要能够从数学上证明被舍弃的高阶项是高阶的无穷小就可以了。但这是非常困难的。在通常情况下,如果提出的物理问题客观存在,那么被舍弃的高阶项一定是高阶的无穷小,我们只需要根据边界条件求出对应的张量就行,而不必要求物理定律解析。

考虑到命题 4-3 和 4-4 以及各阶张量在同胚变换下的性质,公式 1-5 的成立是不言而喻的,只是我们在那里没有指出而已。

第五章　流形上的运算

一个重要的问题是：当已知 $T(M)$ 中的元素 X 或 $T^*(M)$ 中的元素 ω，经过什么样的运算之后得到的结果仍然是 M 上的张量？或者经过什么样的运算之后得到等价的张量定律？

命题 5-1：$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 上的线性运算得到等价的一阶齐次线性微分方程。

这是显然的。事实上，不仅仅是线性运算，$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 上的 F^0 线性运算仍然得到等价的一阶齐次线性微分方程[20]。

命题 5-2：$T(M)$ 或 $T^*(M)$ 上的张量积仍然与 $T(M)$ 或 $T^*(M)$ 等价。

设
$$X(W) = a^j \frac{\partial W}{\partial x^j} = 0 \tag{5-1}$$

和
$$Y(W) = b^j \frac{\partial W}{\partial x^j} = 0 \tag{5-2}$$

是 $T(M)$ 上的两个矢量。由于张量积就是 $T(M)$ 上的局部微分方程的乘积，显然三个方程

$$X(W)Y(W) = a^j b^k \frac{\partial W}{\partial x^j} \otimes \frac{\partial W}{\partial x^k} = X \otimes Y = 0 \tag{5-3}$$

$$\Leftrightarrow \quad X(W) = 0 \text{ 和 } Y(W) = 0$$

是等价的。$T(M)$ 上的高阶张量积和 $T^*(M)$ 上的张量积可以依此类推，不再赘述。

$$T^p(M) = T(M) \otimes T(M) \otimes \cdots \otimes T(M) \tag{5-4}$$

和
$$T^{*p}(M) = T^*(M) \otimes T^*(M) \otimes \cdots \otimes T^*(M) \tag{5-5}$$

也构成 M 上的 F^0 线性空间。$T(M)$ 上的 p 阶张量是 p 阶物理量，同时也是 p 个一阶齐次线性微分方程的乘积的 F^0 线性组合。F^0 线性

空间

$$\oplus T^p(M) = \sum_p \oplus T^p(M)$$

和

$$\oplus T^{*p}(M) = \sum_p \oplus T^{*p} \tag{5-6}$$

在张量积下各自构成分次代数。把 5-4 和 5-5 中的 T 换成 $\mathfrak{g}$，得到 M 上的 p 阶线性张量空间 $\mathfrak{g}^p(M)$ 与 $\mathfrak{g}^{*q}(M)$。

命题 5-3：$\mathfrak{g}^p(M)$ 与 $\mathfrak{g}^{*q}(M)$ 之间的缩并

$$< \mathfrak{g}^p(M), \mathfrak{g}^{*q}(M) > \tag{5-7}$$

仍然与 $\mathfrak{g}^p(M)$ 或 $\mathfrak{g}^{*q}(M)$ 等价。特别地

$$< \mathfrak{g}^p(M), \mathfrak{g}^{*p}(M) > \in R \tag{5-8}$$

从全微分对偶和张量积的定义直接可以得到 5-8。对于非奇异的流形，5-8 确定了一一到上的同胚映射

$$F: \mathfrak{g}^{*p}(M) \to \mathfrak{g}^p(M) \tag{5-9}$$

在 $T^{*p}(M)$ 和 $T^q(M)$ 之间也可以进行缩并，设 $f, g \in F^0$

$$f\vartheta^j \otimes \vartheta^k \in T^{*2}(M) \quad gX_k \in T(M), \tag{5-10}$$

其中　$X_k \in \mathfrak{g}(M)$，$\vartheta^j \in \mathfrak{g}^*(M)$，且

$$< \vartheta^j, X_k > = \delta^j_k \tag{5-11}$$

则

$$\langle f\vartheta^j \otimes \vartheta^k, gX_k \rangle = fg < \vartheta^j \otimes \vartheta^k, X_k > = fg\vartheta^j \tag{5-12}$$

缩并的结果显然得到等价的微分方程。5-12 的意义与 3-14 一样，我们并不是把 f 和 g 从全微分对偶的积分号内提到积分号外，真正的全微分对偶只能是在 $\mathfrak{g}(M)$ 与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 之间进行的。由此我们可以在速度空间的基础上定义 $T(M)$ 与 $T^*(M)$ 之间的对偶，设

$$Z_j = \bar{A}^k_j X_k \text{ span } T(M), \ X_k \text{ span } \mathfrak{g}(M) \tag{5-13}$$

$$\eta^k = A^k_i \omega^i \text{ span } T^*(M), \omega^i \text{ span } \mathfrak{g}^*(M) \tag{5-14}$$

其中

$$\langle \omega^i, X_k \rangle = \delta^i_k \tag{5-15}$$

显然，η^k 与 Z_j 是对偶的，它们满足

$$\langle \eta^k, Z_j \rangle = \bar{A}_j^l A_i^k \langle \omega^i, X_l \rangle = \bar{A}_j^l A_i^k \delta_l^i = \delta_j^k \tag{5-16}$$

按照微分方程理论，$T^p(M)$ 与 $T^{*q}(M)$ 之间的混合张量积是没有意义的，因为这样的运算导出的既不是偏微分方程也不是常微分方程。我们认为混合张量是有意义的，当且仅当混合张量的对偶指标缩并消去以后。由于全微分对偶具有可交换性，所以我们总是可以把协变指标和逆变指标分别排列。混合张量中任意两个相互对偶的指标都可以进行缩并，因为经过适当的位置交换，总可以使它们成为相邻的指标。我们知道张量积中张量相乘的顺序一般是不可交换的，如果一个张量表达式中既有张量积又有缩并，能否交换要看具体情况，例如

$$a^k \Gamma_{kj}^i = \Gamma_{kj}^i a^k \tag{5-17}$$

但是

$$A^{km} \Gamma_{kj}^i \neq \Gamma_{kj}^i A^{km} \tag{5-18}$$

一般地讲，两个相乘的张量分量都带有自由指标是不能交换的，如果其中一个张量分量只有哑指标则是可以交换的。

命题 5-4：对称化算子 S 或反对称化算子 $\mathbf{A}$ 作用于 $T^p(M)$ 或 $T^{*p}(M)$ 仍然得到等价的微分方程。

证明：由于对称化或反对称化仅仅是一阶张量在不同顺序下的张量积的线性组合，由命题 5-1 和 5-2，命题 5-4 的成立是显然的。**证完。**

按照惯例，我们分别称

$$F^p(M) = \mathbf{A}T^{*p}(M) \tag{5-19}$$

和

$$V^p(M) = \mathbf{A}T^p(M) \tag{5-20}$$

为 p 形式空间和 p 矢量空间。F^0 线性空间

$$\oplus F^p(M) = \sum_p \oplus F^p(M) \tag{5-21}$$

和

$$\oplus V^p(M) = \sum_p \oplus V^p(M) \tag{5-22}$$

也构成分次代数，外积是它们上的乘法。由于外积是反对称化和张量积的复合运算，容易看出

命题5-5：$\oplus V^p(M)$ 和 $\oplus F^p(M)$ 上的外积仍然得到等价的微分方程。

以上我们所关心的是经过上述运算从 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 导出的张量定律作为微分方程确实与 $T(M)$ 等价，因而确实是 M 上的张量。我们并没有讨论 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 经过上述运算得到的张量在 G 变换下的性质，因为这些性质已经在古典张量几何中被详尽讨论过了。所以，在 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 上经由上述运算得到的物理量和物理定律确实是 M 上的物理量和物理定律。

现在我们讨论另一个重要的问题：当已知空间 $T^p(M)$ 中的一个元素 X 或空间 $T^{*p}(M)$ 中的一个元素 η，X 或 η 被什么样的算子作用之后仍然得到 M 上的张量？或者说，什么样的算子 O 是 $\oplus T^p(M)$、$\oplus T^{*p}(M)$、$\oplus F^p(M)$ 或 $\oplus V^p(M)$ 上的不变算子或张量算子？从命题 2-18 我们有

推论 5-6：如果 ϕ 和 $O\phi$ 都是协变张量，O 是不变算子，则

$$[u^*, O] = 0 \qquad u \in G \tag{5-23}$$

推论 5-7：如果 X 和 OX 都是逆变张量，O 是不变算子，则

$$[u_*, O] = 0 \qquad u \in G \tag{5-24}$$

5-23 或 5-24 保证了从 O 得到的物理量在 $u \in G$ 的变换下是唯一的，如果 O 是可逆的则 $O\phi = 0$ 与 $\phi = 0$ 的积分相同，因此 O 是不变算子。对我们来说，流形上最重要的张量是微分形式，从微分几何知道，外微分算子 d 与 u^* 是可交换的[8]，而且一组 Pfaff 微分方程与它的闭包有相同的积分流形[20]，所以 d 是 $\oplus F^p(M)$ 上的不变算子；设 η 是 M 上的 p 形式，则 $*\eta$ 是 $m-p$ 形式，而且 Hodge 星形算子 $*$ 是可逆的，所以 $*: F^p(M) \to F^{m-p}(M)$ 是 $\oplus F^p(M)$ 上的不变算子。令 $O = *$，直接计算 5-23，不难证明这个结论。由此可以推出调和算子 Δ 和上微分算子 δ 是不变算子，n 重调和算子 Δ^n 也是不变算子。Δ 是正定算子，所以 $\Delta^{\frac{1}{2}}$ 也是不变算子。

速度空间 $\mathfrak{g}(M)$ 和余速度空间 $\mathfrak{g}^*(M)$ 分别是 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 的子空间，所以上述关于张量运算和不变算子的结论在 $\mathfrak{g}(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上也成立。二者的区别仅仅在于，在 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 上我们采用 F^0 线性运算，而在 $\mathfrak{g}(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上我们采用线性运算。

第六章　流形的结构群 G

结构群 G 在流形的定义中是第一重要的，求出了 G，就可以得到流形在 G 的微分同胚映射下的性质，也就是流形的几何性质。一般地，可以假定 G 是所有单纯 Lie 群的直积。但是对于一个特定的物理问题，只有某些特定的 Lie 群是该物理问题的对称群或结构群。从数学上讲，同构的 Lie 群之间是没有区别的。我们所要做的首先是找出所有不同构 Lie 群，再从中筛选出所需的 Lie 群。寻找所有不同构 Lie 群的基本方法是：

1. Cartan 和 Killing 已经求出了所有的 r 秩单 Lie 代数[6]，它们是 $A_r(r\geqslant 1)$、$B_r(r\geqslant 2)$、$C_r(r\geqslant 3)$、$D_r(r\geqslant 4)$、E_6、E_7、E_8、F_4、G_2
2. 从单 Lie 代数构造出所有不同构的半单 Lie 代数。如果物理问题定义在实流形上，还要求出半单 Lie 代数的所有实形式[5]
3. 从半单 Lie 代数构造出对应的单连通 Lie 群 G_s
4. 求出 G_s 所有分立不变子群 D_i
5. 商群 $G_n = G_s/D_i$ 就是所有不同构的 Lie 群

设 $\phi = 0$ 是流形上的局部物理定律，G_n 是作用在 ϕ 上的 Lie 变换群，从 Lie 变换群的理论我们知道[20]，所有使

$$u_0\phi = \phi \tag{6-1}$$

的群元 u_0 构成 G_n 的迷向子群 S_0。在物理上，迷向子群的存在对物理问题毫无影响。于是商群

$$G = G_n/S_0 \tag{6-2}$$

才是物理问题的结构群，G 在 M 上的作用是可递的。在微分几何里，我们说流形 M 是 G 的齐性空间。如果 G 是某个特定的单 Lie 群 H 或

者某几个单 Lie 群的直积，例如 $H_1 \otimes H_2$，我们也可以把流形写作 $M(H,\phi)$ 或者 $M(H_1 \otimes H_2,\phi)$。

群元 $u \in G$ 诱导出切映射 u_*，u_* 就是 u 的 Jacobi 矩阵的逆，我们知道 u_* 具有性质[8]：

1. 线性

$$u_*(aX + bY) = au_*X + bu_*Y$$

$$X, Y \in \mathfrak{g}(U) \quad a, b \in R \tag{6-3}$$

2. 与 Lie 括号对易

$$[u_*X, u_*Y] = u_*[X, Y] \tag{6-4}$$

3. 对接连两次映射 $u, w \in G$

$$(uw)_* = u_*w_* \tag{6-5}$$

上述性质 1 和 3 说明 u_* 恰好是群元 u 以 $\mathfrak{g}(U)$ 为表示空间的群表示。类似地有作用在 $\mathfrak{g}^*(U)$ 上的对偶映射 u^*。u^* 是的 u_* 逆，u 是微分同胚，u^* 一定存在且具有性质[8]

1. 线性

$$u^*(a\omega + b\theta) = au^*\omega + bu^*\theta$$

$$\omega, \theta \in \mathfrak{g}^*(U) \qquad a, b \in R \tag{6-6}$$

2. 与外积对易

$$u^*(\omega \wedge \theta) = u^*\omega \wedge u^*\theta \tag{6-7}$$

3. 与外微分对易

$$u^*\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}u^*\omega \tag{6-8}$$

4. 对接连两次映射 $u, w \in G$

$$(uw)^* = u^*w^* \tag{6-9}$$

上述性质 1 和 4 说明 u^* 是 u 以 $\mathfrak{g}^*(U)$ 为表示空间的群表示。

给定 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 或 $\omega \in \mathfrak{g}^*(M)$ 是 n 维的一阶微分方程 G 连通子集，并不是所有单纯 Lie 群都会在 $\mathfrak{g}(U)$ 和 $\mathfrak{g}^*(U)$ 上有表示，那些在 $\mathfrak{g}(U)$ 和 $\mathfrak{g}^*(U)$ 上没有表示的单纯 Lie 群就构成了 G_n 的迷向子

群。是否有表示取决于对应的单 Lie 群是否有 n 维表示，单 Lie 群是否有 n 维表示又取决于对应的单 Lie 代数是否有 n 维表示。必须着重指出，在已知一个 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 或 $\omega \in \mathfrak{g}^*(M)$ 时，我们并不知道流形的维数 m，知道的只是 M 上局部微分方程的 G 连通子集的维数 n。对于一个确定的整数 n，我们从单 Lie 代数的表示的维数公式直接可以决定哪些单 Lie 代数可以有 n 维表示。因此也就确定了哪些单 Lie 群可以用于生成微分流形的速度空间。方法如下：

1. 我们知道任何 r 秩单 Lie 代数除了一维表示外，维数最低的表示是基础表示，且基础表示的维数大于 r。因此，对给定的 n，$r \geqslant n$ 的 Lie 代数不会有 n 维表示，可能有 n 维表示的 Lie 代数只有有限个。
2. 假定我们用非负整数组$(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ 标记一个 r 秩单 Lie 代数的不可约表示。令

$$\tau = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tag{6-10}$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_i}{\mathrm{d}\tau} = 1 \tag{6-11}$$

以典型 Lie 代数 A_r 为例，从 A_r 的表示的维数公式[6]

$$D(A_r) = \prod_{ji}\left(1 + \frac{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \cdots + \lambda_{i+j}}{j+1}\right) \tag{6-12}$$

$$(j = 0, 1, 2, \cdots, r-1, \quad i = 1, 2, \cdots, j)$$

容易看出：如果不考虑一维表示，$\tau > 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}D(A_r)}{\mathrm{d}\tau} > 0 \tag{6-13}$$

所以 $D(A_r)$ 是 τ 的单调增函数，无论每一个 λ_i 是什么值，只要 τ 大于某个 $\tau_{\max}$，就可以断言 $\{\lambda_i\}$ 所标记的 Lie 代数表示的维数大于 n。对其他典型 Lie 代数和例外 Lie 代数也有相同的结论。从 1 得到结论：可能有小于等于 n 维表示的单 Lie 代数的个数是

有限的;从 2 得到结论:每一个单 Lie 代数可能有的维数小于等于 n 的表示的个数也是有限的。根据这两点,我们可以很容易编制一个计算机程序对这些单 Lie 代数的维数公式逐一扫描,以确定可以有 n 维表示的单 Lie 代数。每一个这样的单 Lie 代数可以生成一个单连通 Lie 群 G_s,进而每一个 $G = G_s/D_i$ 可以用于生成微分流形。

对于一个物理问题中给定的 n,可能有若干个 Lie 代数有 n 维表示。我们知道单纯 Lie 代数 A_r、B_r、C_r、D_r 分别与 $sl(r+1,C)$、$o(2r+1,C)$、$sp(2r,C)$、$o(2r,C)$ 同构,后者分别生成群 $SL(r+1,C)$、$O(2r+1,C)$、$SP(2r,C)$、$O(2r,C)$,必须根据这些群的性质设计一个物理实验,以便我们对这些性质作简单的观测就可以决定取舍。如果最终确定的 Lie 代数是 m 维的,m 也就是流形的维数。如果 n 等于 3,采用伴随表示,可能的 Lie 代数有 A_1、B_1 和 C_1。但是,A_1、B_1 和 C_1 是同构的,实际上只有唯一的 Lie 代数 A_1,$m = n = 3$。

确定了生成 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 以后,就可以用纯代数的方法求出 $\mathfrak{g}$ 在某个基底,例如 Cartan - Weyl 或 Chevalley 基底下的 n 维表示。如果 M 是实流形,还需要求出 $\mathfrak{g}$ 的基底的实表示[5]。设 $\mathfrak{g}$ 是 m 维 Lie 代数,$\mathfrak{g}$ 的伴随表示 $A(\mathfrak{g})$ 由 m 个 m 阶常数矩阵张成,A_j span $A(\mathfrak{g})$

$$[A_j, A_k] = C^i_{jk}A_i \quad C^i_{jk} \in R \quad i,j,k = 1,2,\cdots,m \tag{6-14}$$

如果我们能够用 A_j 生成矢量

$$Y_j = \bar{b}^k_j \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{6-15}$$

其中 $\bar{b}^k_j$ 已知,使得 Y_j 张成流形 O 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}(O)$,即 Y_j 满足

$$[Y_j, Y_k] = C^i_{jk}Y_i \tag{6-16}$$

则根据 Frobenius 定理,任意矢量

$$Y = \sum_{k=1}^{m} \alpha^k Y_k \quad \alpha^k \in R, Y \in \mathfrak{g}(O) \tag{6-17}$$

可积,流形 $O(G(\mathfrak{g}), Y)$ 的切空间 $T(O)$ 的核 $\mathfrak{g}(O)$ 由 Y_j 张成,余切

空间的核由

$$\theta^j = b^j_k \mathrm{d}y^k \quad b^i_k \bar{b}^j_i = \delta^j_k \tag{6-18}$$

张成。不难证明[7]

$$\langle Y_j, \theta^k \rangle = \delta^k_j \tag{6-19}$$

$$\mathrm{d}\theta^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k \tag{6-20}$$

我们称这样的流形为代表流形，代表流形上的任何性质都是已知的。

设 $\mathfrak{g}$ 是 m 维交换代数，则

$$A_k = \begin{cases} a_{kk} = 1 \\ \text{其余为 } 0 \end{cases} \tag{6-21}$$

$$[A_j, A_k] = 0 \tag{6-22}$$

显然令

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{6-23}$$

可以有

$$[Y_j, Y_k] = 0 \tag{6-24}$$

因此 6-23 张成了一个代表流形 O 的核空间 $\mathfrak{g}(O)$。令

$$Y = \alpha^k \frac{\partial}{\partial y^k} \qquad \alpha^k \in R \quad Y \in \mathfrak{g}(O) \tag{6-25}$$

其特征线方程为

$$\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}t} = \alpha^k \tag{6-26}$$

积分得

$$y^k = y^k_0 + \alpha^k t \tag{6-27}$$

这就是加法群 $Disp$，它在 $\mathfrak{g}(O)$ 上的表示为

$$[u.] = [\frac{\partial y^j}{\partial y^k_0}] = \delta \tag{6-28}$$

δ 是单位矩阵。按照我们后面将要给出的联络的定义，O 的联络恒为 0，这是一个欧氏空间，其结构群为 $Disp$。

命题 6-1：任给 m 维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，设 A_j 是 $\mathfrak{g}$ 的任意表示，则矢量

$$Y_j = [A_j]^k_i y^i \frac{\partial}{\partial y^k} = \bar{b}^k_j \frac{\partial}{\partial y^k} \quad i,j,k = 1,2,\cdots,m \tag{6-29}$$

张成 Lie 代数 $\mathfrak{g}$。

证明：

$$[Y_j, Y_k] = [A_j, A_k]^r_s y^s \frac{\partial}{\partial y^r} + [A_j]^r_s y^s [A_k]^m_l y^l \frac{\partial^2}{\partial y^r \partial y^m} - [A_k]^m_l y^l [A_j]^r_s y^s \frac{\partial^2}{\partial y^m \partial y^r} \tag{6-30}$$

注意到求和指标是任意的以及二阶导数的顺序可以交换，

$$[Y_j, Y_k] = [A_j, A_k]^r_s y^s \frac{\partial}{\partial y^r} = C^i_{jk}[A_i]^r_s y^s \frac{\partial}{\partial y^r} = C^i_{jk} Y_i \quad \text{证完。} \tag{6-31}$$

按照 Frobinius 理论，$\{Y_j\}$ 是可积的。事实上，当 Lie 代数是 B_n 或 D_n 时，流形函数是单位球面。

$$W(y) = \sum_{j=1}^{m} (y^j)^2 = 1 \tag{6-32}$$

$|y| \neq 0$，即 y^j 不全为 0。对任何一个 Y_j，有

$$Y_j(W) = 0 \tag{6-33}$$

我们称这个代表流形为 O，$\{Y_j\}$ 张成的线性空间为 $T(O)$ 的核空间 $\mathfrak{g}(O)$，通常采用 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示来生成 $\mathfrak{g}(O)$，这样生成的 Y_j 的基底矩阵是可逆的，可以很容易生成 $\mathfrak{g}^*(O)$，这只要按照 6-18 求出逆变基底矩阵的逆就可以了。

已知 $\mathfrak{g}(O)$，令 $\boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^m)$ 为群参数，还可以求出作用在 O 上的结构群 G。

$$A = \sum_{a=1}^{m} \mu^a A_a \quad \mu^a \in R \tag{6-34}$$

则矢量

$$Y = [A]^k_i y^i \frac{\partial}{\partial y^k} \tag{6-35}$$

是 Lie 代数 $\mathfrak{g}(O)$ 中的一个元素，因此是可积的。偏微分方程

$$Y(W) = [A]^k_i y^i \frac{\partial W}{\partial y^k} = 0 \tag{6-36}$$

的特征线方程为，

$$\frac{\mathrm{d}y^k}{\mathrm{d}t} = [A]^k_j y^j \tag{6-37}$$

$$y^k|_{t=0} = y^k_0 \tag{6-38}$$

6-37 是常系数线性齐次常微分方程组，可以用矢量记法简记为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{y} \tag{6-39}$$

$$\boldsymbol{y}\ |_{t=0} = \boldsymbol{y}_0 \tag{6-40}$$

6-39 的解为[4]

$$\boldsymbol{y} = e^{At}\boldsymbol{y}_0 = e^{\sum\limits_{a=1}^{m}\mu^a A_a t}\boldsymbol{y}_0 \tag{6-41}$$

解 6-41 具有群性质[23]：若固定 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^m\}$，则同一个 $A \in A(\mathfrak{g})$ 生成的群元作用在同一条特征线上（图 6-1），如果

$$\boldsymbol{y}_1 = e^{At_1}\boldsymbol{y}_0 \quad \boldsymbol{y}_2 = e^{At_2}\boldsymbol{y}_1 \tag{6-42}$$

则

$$\boldsymbol{y}_2 = e^{A(t_1+t_2)}\boldsymbol{y}_0 \tag{6-43}$$

或表示为

$$\boldsymbol{y}_1 = v_1\boldsymbol{y}_0 \quad \boldsymbol{y}_2 = v_2\boldsymbol{y}_1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{y}_2 = v_2 v_1 \boldsymbol{y}_0 \quad v_1, v_2 \in G_{loc} \tag{6-44}$$

此时

$$v_1 v_2 = v_2 v_1 \tag{6-45}$$

6-44 表示的群就是我们通常在微分几何里遇到的单参数子群。给定不同的群参数可以确定不同的矢量 6-35，进而得到不同的单参数子群。

命题 6-2：从 6-35 生成的任何单参数子群是互相连通的。

证明：无论群参数等于什么，只要 $t = 0$，我们可以从 6-41 得到

$$y^k = y^k_0 \quad \frac{\partial y^k}{\partial y^j_0} = \delta^k_j \tag{6-46}$$

上式说明 t 为零的时候对应的表示是恒等矩阵，所以，无论群参数等于什么，所生成的单参数子群都与恒等元连通。反之，给定群参数，从恒等元也可以得到任何单参数子群。所以任何两个单参数子群是连

通的。**证完。**

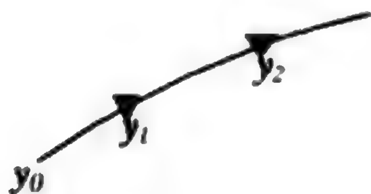


图 6-1

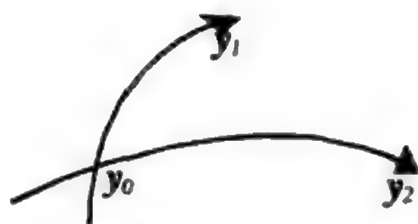


图 6-2

如果 y_1 和 y_2 位于经过 y_0 的不同的特征线上(图6-2)，它们生成不同的单参数子群

即
$$y_1 = e^{Bt_1} y_0 \quad y_2 = e^{At_2} y_0 \tag{6-47}$$

$$B = \sum_{a=1}^{m} \pi^a A_a \quad \pi^a \in R$$

则
$$y_2 = e^{At_2} e^{-Bt_1} y_1 \tag{6-48}$$

或表示为

$$y_0 = v_1 y_1 \qquad y_2 = v_2 y_0$$

$$\Rightarrow y_2 = v_2 v_1 y_1 \quad v_1, v_2 \in G_{loc} \tag{6-49}$$

此时
$$v_1 v_2 \neq v_2 v_1 \tag{6-50}$$

6-39的右端是 y 和 μ 的解析函数，按照微分方程组的理论，子群6-41是Lie群。命题6-2说明所有的单参数子群构成局部Lie群 G_{loc}。$v \in G_{loc}$ 把开域 U 上的一条特征线段映射为另一个开域上的特征线段，G_{loc} 的可交换群元构成 $Disp$，不可交换群元构成 $Diff$，$G_{loc} = Diff \otimes Disp$。$G_{loc}$ 在 $\mathfrak{g}(O)$ 和 $\mathfrak{g}^*(O)$ 上的表示为

$$v_* = \frac{\partial y^j}{\partial y_0^k} = e^{A(\mu)t} \quad v^* = \frac{\partial y_0^k}{\partial y^j} = e^{-A(\mu)t} \quad \langle v_*, v^* \rangle = \delta \tag{6-51}$$

v_* 是推前的，而 v^* 是拉回的，二者沿特征线的走向相反。得到6-51以后，利用第十章给出的公式将可以求出 O 上所有几何性质，

如联络、曲率等。所以代表流形上的任何性质都是已知的。

设 X 是 $\mathfrak{g}(M)$ 中的任意矢量，

$$X = a^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{6-52}$$

局部偏微分方程为

$$X(W) = 0 \tag{6-53}$$

定义 6-3：流形上的特征曲线方程为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{6-54}$$

$$\boldsymbol{x} \;\Big|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0 \tag{6-55}$$

其中　$\boldsymbol{x} = \{x^1, x^2, \cdots, x^m\}$　$\boldsymbol{a} = \{a^1, a^2, \cdots, a^m\}$

$\boldsymbol{x}_0 = \{x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^m\}$

当 $a^k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 满足 Lipschitz 条件时，微分方程组的基本定理保证 6-54 的解局部存在且唯一[23]。设这个解为

$$x^j = u^j(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}) \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{6-56}$$

6-56 就是一个以 $\boldsymbol{\mu} = \{\mu^1, \mu^2, \cdots, \mu^m\}$ 为参数的，把开域 U 上 $\boldsymbol{x}_0$ 对应的特征线段映射为 $\boldsymbol{x}$ 对应的特征线段的坐标变换。我们可以把 6-56 简写为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}) \tag{6-57}$$

6-54 是所谓定常的动力系统，因此 6-57 构成一个单参数子群[23]，即

若有　$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}(t_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu})$ 和 $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{u}(t_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu})$　(6-58)

则有

$$\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{u}(t_1 + t_2, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}) \tag{6-59}$$

或表示为

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{x}_0 \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{x}_1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{x}_0 \qquad \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in G_{loc} \tag{6-60}$$

此时

$$\boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_2 \boldsymbol{u}_1 \tag{6-61}$$

所不同的是，在我们这里 6-57 是从某个 m 维 Lie 代数 $\mathfrak{g}(M)$ 生

成的，如果存在同胚映射 $F: O \to M$，容易证明所有 $\boldsymbol{\mu}$ 不同的单参数子群是互相连通的，因此所有的单参数子群构成 m 维局部群 G_{loc}，群参数是 $\boldsymbol{\mu}$。不同的 $\boldsymbol{\mu}$ 对应于通过 $\boldsymbol{x}_0$ 的不同的特征线，在不同的特征线上若有

$$\boldsymbol{x}_1 = u(t_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}_1) \quad 和 \quad \boldsymbol{x}_2 = u(t_2, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}_2) \tag{6-62}$$

解出 $\boldsymbol{x}_0$，

$$\boldsymbol{x}_0 = u^{-1}(t_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1)$$

则

$$\boldsymbol{x}_2 = u(t_2, u^{-1}(t_1, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1), \boldsymbol{\mu}_2) \tag{6-63}$$

上式是两个连续的变换，它们定义了群元的乘法，可以表示为

$$\boldsymbol{x}_0 = u_1 \boldsymbol{x}_1 \qquad \boldsymbol{x}_2 = u_2 \boldsymbol{x}_0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}_2 = u_2 u_1 \boldsymbol{x}_1 \qquad u_1, u_2 \in G_{loc} \tag{6-64}$$

此时

$$u_1 u_2 \neq u_2 u_1 \tag{6-65}$$

可以认为 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{x}$ 分别是不同开域上的点，$u \in G_{loc}$ 把 U 上 $\boldsymbol{x}_0$ 的一条特征线段映射为 V 上 $\boldsymbol{x}$ 的一条特征线段，存在局部可交换子群说明流形沿特征线是局部欧氏的。根据微分方程组理论[23]，如果 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 满足 Lipschitz 条件，解 u 对初值 $\boldsymbol{x}_0$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 连续依赖，G_{loc} 是个拓扑群；如果 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 而言是 r 次连续可微的，则解 6-57 对 $t, t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}$ 而言是 r 次连续可微的，G_{loc} 就是 r 次可微群；如果 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$ 对 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 而言是解析的，G_{loc} 就是局部 Lie 群。由此可见，我们根本无须像流形的古典定义那样为开域之间的映射是否与开域上的局部函数相容而操心。在我们这里，群 G 是直接从局部物理定律生成，相容性是毫无疑问的。

G_{loc} 任何一个元素在 $\mathfrak{g}(U)$ 和 $\mathfrak{g}^*(U)$ 上的表示为

$$u_* = \frac{\partial x^j}{\partial x_0^k} \quad u^* = \frac{\partial x_0^k}{\partial x^j} \quad \langle u_*, u^* \rangle = \delta \tag{6-66}$$

必须指出，任给 $Z \in T(U)$，从 Z 的特征线方程得到的只是一个独立的单参数子群，根据常微分方程组解的存在唯一性定理，解只在

过 $\boldsymbol{x}_0$ 的一条特征线上局部存在。由于 $T(U)$ 是 F^0 线性的，不同的 Z 生成的单参数子群一般是互相不连通的，不能从 $T(U)$ 生成 G 的局部子群 G_{loc}。而对于任何 $X \in \mathfrak{g}(M)$，从 X 的特征线方程也可以得到局部单参数子群，令群参数变动，从 $\mathfrak{g}(U)$ 的所有元素生成的单参数子群都与单位元连通，可以生成局部子群 G_{loc}。群的任何群元可以从它的局部子群得到，具体做法是：在单位元开域 U 上求出局部子群

$$\boldsymbol{x}_1 = u_1(t_1, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}_1) \quad |t_1| \leqslant \delta \tag{6-67}$$

适当选取 $t_1, \boldsymbol{\mu}_1$，使得 $\boldsymbol{x}_1 \in U$，以

$$\boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{x}_1 \tag{6-68}$$

为初始条件，求解方程 6-54，得

$$\boldsymbol{x}_2 = u_2(t_2, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}_2) \quad |t_2| \leqslant \delta \tag{6-69}$$

6-69 就是 $\boldsymbol{x}_1$ 邻域 V 上的局部子群。再适当选取 $t_2, \boldsymbol{\mu}_2$，使得 $\boldsymbol{x}_2 \in V$，又可以以

$$\boldsymbol{x}|_{t=0} = \boldsymbol{x}_2 \tag{6-70}$$

为初始条件求出 $\boldsymbol{x}_2$ 开域 W 上的局部子群，如此反复进行下去，则结构群的任何群元可以从一系列局部子群的群元生成，

$$u = \prod_{\mu} u_{\mu} \qquad u_{\mu} \in G_{loc} \tag{6-71}$$

一般地我们不一定能直接生成任何 $u \in G$，但是我们总可以直接生成局部单参数子群，所有互相连通的局部单参数子群构成局部子群，然后由上式生成 u。由于特征线的概念与流形是否可积无关，本章叙述的求局部 Lie 子群的方法对可积流形和不可积流形同样适用。

命题 6-4：$\mathfrak{g}(M)$ 的维数等于 G 的维数。

证明：我们是从 $\mathfrak{g}$ 的表示生成 $\mathfrak{g}(M)$，又从 $\mathfrak{g}(M)$ 生成 G。但是 $\mathfrak{g}$ 的维数就是 G 的维数，所以 $\mathfrak{g}(M)$ 的维数等于 G 的维数。$\mathfrak{g}(M)$ 与 $T(M)$ 之间相差一个满秩变换，因此 $T(M)$ 作为一个 F^0 线性空间的维数也等于 G 的维数。**证完**。

如果 6-54 的右端还是 t 的函数,即

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = f^j(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{6-72}$$

$$\boldsymbol{x}\ \Big|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0 \quad \boldsymbol{x}_0 = \{x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^m\} \tag{6-73}$$

6-72 是所谓非定常系统,它的解一般不具有定常系统的群性质,无法求出对应的单参数可交换子群,其对应的流形不是局部欧氏的。我们感兴趣的是一种特殊的非定常系统:

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = f^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})\phi'(t) \tag{6-74}$$

称 6-74 为可分离变量的。作变换

$$\tau = \phi(t) \quad \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \phi'(t) \tag{6-75}$$

则
$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau}\phi'(t) = f^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})\phi'(t) \tag{6-76}$$

所以
$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau} = f^j(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \tag{6-77}$$

$$\boldsymbol{x}\ \Big|_{\tau=\phi(0)} = \boldsymbol{x}_0 \tag{6-78}$$

这样就把非定常系统变为定常系统。设 6-77 的解为

$$x^j = u^j(\boldsymbol{x}_0, \tau, \boldsymbol{\mu}) = u^j(\boldsymbol{x}_0, \phi(t), \boldsymbol{\mu}) \tag{6-79}$$

如果 $\phi(t)$ 是周期函数,则解 6-79 是周期的。

第七章　流形之间的映射与超流形

作用在两个流形之间的映射是 $F:O\to M$，与 $u\in G$ 不同，F 无例外地作用于 O 和 M 的所有对应开域上，F_* 无例外地作用于逆变张量在所有对应开域的局部限制上，F^* 无例外地作用于协变张量在所有对应开域的局部限制上。

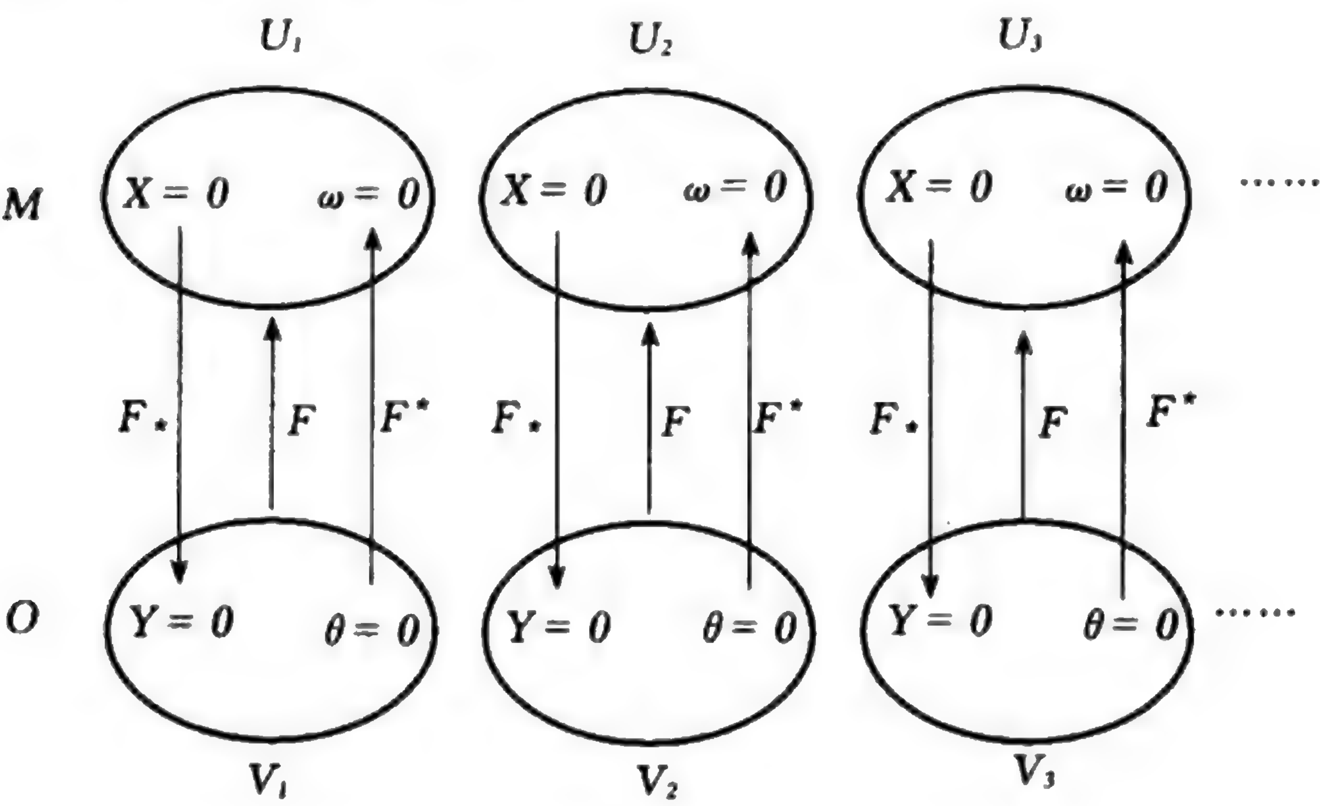


图 7-1

如果 F 是同胚，把所有 m 维流形之间的同胚映射的集合记为 $Diff=\{F,H,\cdots\}$，显然 $Diff$ 的元素具有性质2-3至2-6，因此 $Diff$ 构成群。F_* 具有性质：

1. 线性

$$F_*(aX+bY)=a(F_*X)+b(F_*Y)$$

$$X,Y\in \mathfrak{g}(M)\quad a,b\in R \tag{7-1}$$

2. 与 Lie 括号对易

$$[F_* X, F_* Y] = F_*[X, Y] \tag{7-2}$$

3. 对接连两次映射 $F, H \in Diff$

$$(FH)_* = F_* H_* \tag{7-3}$$

F_* 就是作用在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的 Jacobi 变换矩阵的逆，上述性质 1 和 3 说明 F_* 恰好是群元 F 以 $\mathfrak{g}(M)$ 为表示空间的群表示。

类似地有对偶映射 F^*（拉回映射）。F^* 具有性质

1. 线性

$$F^*(a\omega + b\theta) = a(F^*\omega) + b(F^*\theta)$$

$$\omega, \theta \in \mathfrak{g}^*(M) \quad a, b \in R \tag{7-4}$$

2. 与外积对易

$$F^*(\omega \wedge \theta) = F^*\omega \wedge F^*\theta \tag{7-5}$$

3. 与外微分对易

$$F^* \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}F^*\omega \tag{7-6}$$

4. 对接连两次映射 $F, H \in Diff$

$$(FH)^* = F^* H^* \tag{7-7}$$

F^* 恰好是群元 F 以 $\mathfrak{g}^*(M)$ 为表示空间的群 $Diff$ 的表示。我们称与 G 有关的流形性质是几何性质，与 $Diff$ 有关的流形性质是拓扑性质。如果映射 F 不是同胚，上述性质 7-1 至 7-7 仍然成立，但是映射的逆和恒等映射都不存在，这样的映射的集合不构成群而是构成所谓半群。

命题 7-1：设 ϑ^i 张成流形 M 上的 $\mathfrak{g}^*(M)$，θ^i 张成代表流形 O 上的 $\mathfrak{g}^*(O)$，且有

$$\mathrm{d}\theta^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k \tag{7-8}$$

则存在光滑映射 $F: O \to M$ 的充分必要条件是

$$\mathrm{d}\vartheta^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \vartheta^j \wedge \vartheta^k \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, m \tag{7-9}$$

而且任何两个这样的映射 F_1 和 F_2 只相差 M 或 O 上的一个右移动。

证明:设流形 M 的G 连通微分方程子集是n 维的,而流形 O 上的 G 连通微分方程子集是m 维的,$n \geqslant m$,在 $M \otimes O$ 上考虑$n+m$ 个自变量的 Pfaff 方程组

$$\psi^i = \theta^i - \vartheta^i \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{7-10}$$

由于 ϑ^i 是处处线性无关的,所以 ψ^i 也是处处线性无关的。这个方程组给出了 $M \otimes O$ 上的 m 维平面场,因为

$$\begin{aligned} d\psi^i &= -\frac{1}{2}C^i_{jk}(\theta^j \wedge \theta^k - \vartheta^j \wedge \vartheta^k) \\ &= -\frac{1}{2}C^i_{jk}(\theta^j \wedge \psi^k - \psi^j \wedge \vartheta^k) \\ &\equiv 0 \bmod(\psi^1,\cdots,\psi^m) \end{aligned} \tag{7-11}$$

根据 Frobenius 定理,方程组 7-10 是完全可积的。因此对任意一点$(x,y) \in M \otimes O$ 存在x 的邻域U 上的局部坐标系$\{x^\alpha, \alpha = 1,2,\cdots, n\}$ 和 y 的领域 V 上的局部坐标系$\{y^j, j = 1,2,\cdots,m\}$,使得方程组 7-10 在 $U \otimes V$ 上有唯一的一个积分流形

$$\varphi^i(x^1,\cdots,x^n;y^1,\cdots,y^m) = 0 \tag{7-12}$$

经过点(x,y),其中 $x \in U, y \in V$。

由于 $\vartheta^i(i = 1,2,\cdots,m)$ 是线性无关的,我们有 m 个线性无关的解 φ^i,从 7-12 可以解出

$$y^i = f^i(x^1,x^2,\cdots,x^n) \quad i = 1,2,\cdots,m \tag{7-13}$$

这就是映射 $F:U \to V$,如果M 和O 是物理流形,同一个流形上的所有局部物理定律相同,7-13 就是 $F:M \to O$。反之如果映射 $F:M \to O$ 存在,从 F^* 的性质 2 容易证明 7-9 成立。

设 F_1 和 F_2 是从 7-10 求出的两个不同的映射

$$F_1: y_1^i = f_1^i(x^1,x^2,\cdots,x^n) \tag{7-14}$$

$$F_2: y_2^i = f_2^i(x^1,x^2,\cdots,x^n) \tag{7-15}$$

如果 $y_1 = \{y_1^1, y_1^2, \cdots, y_1^m\}$ 和 $y_2 = \{y_2^1, y_2^2, \cdots, y_2^m\}$ 分别是开域 V_1 和 V_2 上的局部坐标,按照我们关于流形的定义,必然存在 $u_1, u_2 \in$

G, u_1 和 u_2 分别把 V_1 和 V_2 映射到观测空间，得到 $u_1(V_1)$ 和 $u_2(V_2)$。由可观测性定义，必然存在 $v \in G$ 把 $u_1(V_1)$ 映射到 $u_2(V_2)$

$$u = u_1^{-1} v u_2 : y_2^i = u^i(y_1^1, y_1^2, \cdots, y_1^m) \tag{7-16}$$

因此 $$y_2 = u y_1 \tag{7-17}$$

或 $$F_2(x) = u F_1(x) \tag{7-18}$$

最后得到 $$F_2 = u F_1 \tag{7-19}$$

从 7-8 和 7-9 还可以看出：尽管定义流形 O 与 M 的 G 连通微分方程子集的维数可以不同，但是 O 与 M 的结构群的维数必然相同，否则它们之间不存在光滑映射。可见，流形的维数既是几何性质又是拓扑性质。**证完。**

与命题 7-1 类似的一个定理的证明见文献[6]。

此外，从对偶性可以直接得到

命题 7-2：设 X_j 张成流形 M 的 $\mathfrak{g}(M)$，Y_k 张成代表流形 O 的 $\mathfrak{g}(O)$，且有

$$[Y_i, Y_j] = C_{ij}^k Y_k \tag{7-20}$$

则存在光滑映射 $F: O \to M$ 的充分必要条件是

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \qquad C_{ij}^k \in R \tag{7-21}$$

在具体求映射 $F: O \to M$ 之前，我们必须先给出 F 的定位和定向。所谓映射 F 的定位指的是确定 M 和 O 对应开域上的一对对应点。若 $\{x^\alpha\}$ 和 $\{y^j\}$ 分别是 M 和 O 上的某个局部坐标，定位即是给定：

$$\text{当 } y^i = y_0^j \qquad \text{时 } x^\alpha = x_0^\alpha \tag{7-22}$$

这里 α 的取值范围是$[1, 2, \cdots, n]$，n 是G 连通子集ϕ 的维数，它不一定等于流形的维数 m。按照定义，F_* 作用在 $\mathfrak{g}(O)$ 和 $\mathfrak{g}(M)$ 的任意一对对应矢量上，或者说一对对应矢量足以确定 F_*。所谓定向就是在定位指出的 M 和O 的开域上指定一对对应矢量。如果随意指定两

对矢量，求出两个映射 F_1 和 F_2，命题7-1告诉我们，F_1 和 F_2 只相差一个右移动。由于物理流形上的物理量是局部相同的，对于 M 上的一个研究局部物理量的观测者来说，F_1 和 F_2 没有区别。同样，指定不同的定位 x_0 和 y_0 得到不同的映射，它们对 M 上的一个研究局部物理量的观测者来说也是没有区别的。令

$$X = a^{\alpha}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n \tag{7-23}$$

从 $\mathfrak{g}(O)$ 上任取矢量 Y，

$$Y = b^{j}\frac{\partial}{\partial y^{j}} \qquad j = 1,2,\cdots,m \tag{7-24}$$

可以取定向为 $Y \to X$，这样我们所求的映射 $F: O \to M$ 是由定位

$$y_0^j \to x_0^{\alpha} \tag{7-25}$$

和定向

$$Y \to X \tag{7-26}$$

所决定的。

假定我们已知流形上一个矢量 X，在映射 F 被确定之前并不能确定流形的维数。但是从第六章知道，我们可以从维数公式确定若干个可以有 n 维表示的 Lie 代数。设 $\mathfrak{g}$ 是这些 Lie 代数中的一个，A_j 是这个 m 维 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的 m 维伴随表示，根据命题6-1，

$$Y_j = [A_j]_i^k y^i \frac{\partial}{\partial y^k} \qquad i,j,k = 1,2,\cdots,m \tag{7-27}$$

张成 Lie 代数 $\mathfrak{g}(O)$。令

$$Y = \mu^j Y_j = b^k \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad \mu^j \in R \tag{7-28}$$

指定定向 $Y \to X$，那么从

$$F_*(X) = Y \tag{7-29}$$

可得

$$a^{\gamma}\frac{\partial y^k}{\partial x^{\gamma}}\frac{\partial}{\partial y^k} = b^k\frac{\partial}{\partial y^k} \qquad \gamma = 1,2,\cdots,n \tag{7-30}$$

于是有，

$$a^{\gamma}\frac{\partial y^k}{\partial x^{\gamma}} = b^k \tag{7-31}$$

7-31是 m 个一阶拟线性偏微分方程。如果映射 F 存在,7-31有形如

$$\varphi^j(y^1, y^2, \cdots, y^m; x^1, x^2, \cdots, x^n) = C^j$$
$$j, k = 1, 2, \cdots, m \qquad m \leqslant n \tag{7-32}$$

的隐函数解,函数矩阵 $\dfrac{\partial \varphi^j}{\partial y^k}$ 的秩为 m,

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\gamma} + \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma} = 0$$
$$\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, n \qquad i, j = 1, 2\cdots, m \tag{7-33}$$

7-31等价于

$$\frac{\partial \varphi^j}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma}a^\gamma = \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^k}b^k \tag{7-34}$$

或
$$a^\gamma \frac{\partial \varphi^j}{\partial x^\gamma} + b^k \frac{\partial \varphi^j}{\partial y^k} = 0 \tag{7-35}$$

7-35是关于 φ^j 的 m 个完全相同的齐次线性偏微分方程,其特征线方程为

$$\frac{dx^1}{a^1(x)} = \frac{dx^2}{a^2(x)} = \cdots = \frac{dx^n}{a^n(x)} = \frac{dy^1}{b^1} = \frac{dy^2}{b^2} = \cdots = \frac{dy^m}{b^m} \tag{7-36}$$

上式中

$$\frac{dx^\alpha}{a^\alpha(x)} = \frac{dx^\beta}{a^\beta(x)} \text{ 和 } \frac{dy^j}{b^j} = \frac{dy^k}{b^k} \qquad \alpha \neq \beta, j \neq k \tag{7-37}$$

不是我们需要的,因为它们的首次积分中只包含变量 x 或变量 y。从

$$\frac{dx^\alpha}{a^\alpha(x)} = \frac{dy^j}{b^j} \text{ 和 } \frac{dx^\alpha}{a^\alpha(x)} = \frac{dy^k}{b^k} \qquad j \neq k \tag{7-38}$$

容易得到7-37,所以7-38的两个式子里只有一个是我们需要的。最后得到

$$\frac{dx^\alpha}{a^\alpha(x)} = \frac{dy^k}{b^k(y)} \qquad \text{对应指标不求和} \tag{7-39}$$

7-39共有 $\min(n, m)$ 个方程。经常遇到的情况是 $n \geqslant m$, m 个

方程的方程组 7-39 的线性无关的首次积分不会超过 m 个。如果最多可以得到 m 个线性无关的首次积分 φ^i，则流形 M 和 O 的维数就是 m，结构群的 Lie 代数是 m 维的。我们可以从定位确定 7-32 中的 m 个常数 C^i，然后解出 y^j，这样就求出了映射 F，微分可以得到 F 的 Jacobi 矩阵。如果 7-39 的首次积分的个数不等于 m，那就说明我们选择的 Lie 代数是不合适的。

如果 $m < n$，F 的 Jacobi 矩阵 $J = \dfrac{\partial y^j}{\partial x^a}$ 是 m 秩 $n \times m$ 矩阵，F^{-1} 不存在。我们仍旧可以从 7-27 定义的 Y_j 生成 X_j span $\mathfrak{g}(M)$。令

$$X_j = \bar{a}_j^a \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{7-40}$$

则

$$F_*(X_j) = Y_j \tag{7-41}$$

或

$$\bar{a}_j^a \frac{\partial y^i}{\partial x^a} = [A_j]^i_k y^k = \bar{b}_j^i \tag{7-42}$$

上式中 $\bar{a}_j^a$ 是一个 $n \times m$ 未知矩阵，$\dfrac{\partial y^i}{\partial x^a}$ 是一个 $m \times n$ 已知矩阵，$\bar{b}_j^i$ 是一个 $m \times m$ 已知矩阵，这个问题可以用求广义逆的方法解决。

如果 $m = n$，且 $f = F^{-1}$ 存在，F 是微分同胚映射，

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \cdots, x^m; C^1, C^2, \cdots, C^m) \tag{7-43}$$

$$x^j = F^j(y^1, y^2, \cdots, y^m; C^1, C^2, \cdots, C^m) \tag{7-44}$$

令

$$[F_*] = J = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} \qquad j, k = 1, 2, \cdots, m \tag{7-45}$$

是映射 F 的 Jacobi 矩阵。则 F 的逆映射的 Jacobi 矩阵是

$$[F^*] = J^{-1} = [\frac{\partial x^k}{\partial y^j}] \tag{7-46}$$

$$JJ^{-1} = \delta \tag{7-47}$$

从 7-43 至 7-46 可以看出，当 J 可逆时，J 和 J^{-1} 既可以表示为 x^k 的函数矩阵，又可以表示为 y^j 的函数矩阵。

如果 J 还满足

$$J^+ = J^{-1} \qquad 或 \qquad J^T = J^{-1} \tag{7-48}$$

则 F 分别是复的或实的等距微分同胚。这里 J^+ 表示 J 的共轭转置矩阵，J^T 表示 J 的转置矩阵。

已知映射 F，就可以把 $Y_j \in \mathfrak{g}(O)$ 映射到 $\mathfrak{g}(M)$ 上去，

$$F_*(X_j) = Y_j \tag{7-49}$$

$$a_j^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} = [A_j]_k^i y^k = b_j^i \tag{7-50}$$

由于 J 可逆，从 7-50 可以直接算出 X_j 的基底矩阵，这样就生成了 $\mathfrak{g}(M)$。

无论光滑映射 F 是不是微分同胚，从对易子的性质可得

$$F_*[Y_j, Y_k] = C_{jk}^i F_* Y_i = [F_* Y_j, F_* Y_k] = [X_j, X_k] = C_{jk}^i X_i \tag{7-51}$$

所以 $\{X_j\}$ 张成 M 上的 Lie 代数。还可以把 $\theta^j \in \mathfrak{g}^*(O)$ 映射到 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上去，

$$\vartheta^j = F^* \theta^j = a_k^j \mathrm{d}x^k \tag{7-52}$$

从外微分和外积的性质可得，

$$\begin{aligned} F^* \mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}(F^* \theta^i) = \mathrm{d}\vartheta^i = -\frac{1}{2} F^* (C_{jk}^i \theta^j \wedge \theta^k) \\ &= -\frac{1}{2} C_{jk}^i F^* \theta^j \wedge F^* \theta^k = -\frac{1}{2} C_{jk}^i \vartheta^j \wedge \vartheta^k \end{aligned} \tag{7-53}$$

所以 ϑ^j 是 M 上的 Maurer-Cartan 形式。

研究一下流形上的物理量和群表示在 $F: O \to M$ 的作用下的行为是有益的。设

$$X = a^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \tag{7-54}$$

是流形 M 的任何开域 U 上的一个矢量。用 u_* 把 X 映射到 P^m 上去，

$$u_*(X) = a^\alpha [u_*]_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \tag{7-55}$$

再用 F 把 X 映射到代表流形 O 的 P^m 上去，

$$F_{\cdot}[u_{\cdot}(X)] = a^{\alpha}[u_{\cdot}]_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial}{\partial y^j} = Y \tag{7-56}$$

我们还可以用另一种方法完成这个映射，那就是先用 F 把 X 从 M 的开域 U 映射到 O 的对应开域 V，再用 $v_{\cdot}$ 把 Y 从开域 V 映射到 O 的 P^m 上去

$$\begin{aligned} v_{\cdot}[F_{\cdot}(X)] &= a^{\alpha} \frac{\partial y^k}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial y^k} \\ &= a^{\alpha} \frac{\partial y^k}{\partial x^{\alpha}} [v_{\cdot}]_k^j \frac{\partial}{\partial y^j} = Y \end{aligned} \tag{7-57}$$

物理量是唯一的，两式比较可得

$$[u_{\cdot}]_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial y^j}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial y^k}{\partial x^{\alpha}} [v_{\cdot}]_k^j \tag{7-58}$$

由此式可以看出，我们在前面选择的定位和定向只是为了确定两个流形的结构群上的一对对应元素的表示而已。考虑到求出的映射 $F_{\cdot} = \frac{\partial y^k}{\partial x^{\alpha}}$ 可以相差一个左移动或右移动，不论用什么方法，只要能得到两个流形结构群的任意对应元素 u 和 v 的表示 $[u_{\cdot}]_{\alpha}^{\beta}$ 和 $[v_{\cdot}]_k^j$，就可以利用 7-58 求出映射 $F_{\cdot}$。7-58 写成矩阵形式为

$$[u_{\cdot}]J = J[v_{\cdot}] \tag{7-59}$$

上式中 $[u_{\cdot}]$ 是 $n \times n$ 矩阵，$[v_{\cdot}]$ 是 $m \times m$ 矩阵，J 是 $n \times m$ 矩阵。如果 $m \doteq n$，且 J 可逆，则

$$[v_{\cdot}] = J^{-1}[u_{\cdot}]J \tag{7-60}$$

如果 F 还是等距微分同胚，有

$$[v_{\cdot}] = J^{+}[u_{\cdot}]J \tag{7-61}$$

可见，如果 F 是微分同胚，M 上 G 的表示 $[u_{\cdot}]$ 与 O 上 G 的表示 $[v_{\cdot}]$ 是等价的。用 $G(M)$ 表示 M 上的结构群，$G(O)$ 表示 O 上的结构群，由于 $[u_{\cdot}]$ 和 $[v_{\cdot}]$ 都是矩阵群，从 7-60 可以得到

$$J[v.][v'.]J^{-1} = J[v.]J^{-1}J[v'.]J^{-1} = [u.][u'.]$$
$$v.,v'. \in G(O) \quad u.,u'. \in G(M) \tag{7-62}$$

可见$J:G(O)\to G(M)$保持了矩阵群上的乘法，是矩阵群之间的同构映射。

只要$M(G,\phi)$和$O(G,o)$同构，按照命题7-1和7-2，存在一个光滑映射$F:O\to M$。由于两个G连通子集ϕ和o可以具有不同的维数，F不一定是微分同胚。

定义 7-3：设流形O和M同构，且存在微分同胚$F:O\to M$，就说M和O同胚同构。

显然，同胚同构具有对称性，自反性和传递性。根据7-60，如果M与O同胚同构，则作用在$\mathfrak{g}(M)$和$\mathfrak{g}(O)$上的群表示等价。

任给流形$M(G,\phi)$和$F\in Diff$，其中$Diff$是本章前面定义的群，则$M(G,F(\phi))$与$M(G,\phi)$同胚同构。我们称微分方程$\phi=0$与$F(\phi)=0$是$Diff$连通（读作D连通）的，或$M(G,F(\phi))$与$M(G,\phi)$是$Diff$连通的，称所有$Diff$连通的流形的集合为一个同胚流形束。对于一个由若干拓扑性质决定的同胚流形束，我们总是希望找到一个易于求解的代表。找到并且解出这个代表之后，对于这个流形束中的任何物理问题，剩下的就是求一个微分同胚映射了。显然，有多少不同构的 Lie 代数就有多少流形束，如果每一个流形束都有一个代表被完全解出，我们就解决了所有的物理问题。令一个流形束中所有流形的单位元开域上的微分方程的集合为Ψ，我们可以由此定义一个超流形或束流形：

定义 7-4：同胚束流形P是一个偶对$P:(Diff,\Psi)$。

P一般地不是物理流形，它不满足第一协变公理而满足第二协变公理。满足第二协变公理的流形的所有开域上的局部微分方程是不相同的，这些局部微分方程构成一个$Diff$连通子集，因此P在局部上是不可观测的，但是在P的观测空间上我们仍然有相同的观测效果，因为P上的物理量在观测空间中的像是由同一个$Diff$连通子

集拼接而成的，所以 P 是整体可观测的。

尽管同胚束流形 P 的结构群 $Diff$ 与流形 M 的结构群 G 在切空间上的作用是相同的。但是它们之间有很大的不同，比较第六章和第七章我们看到，主要的不同在于 $Diff$ 和 G 是以不同的方法生成的。研究同胚束流形的目的是寻找一组足以确定一个流形束的拓扑性质，用以判断某个给定的流形是否同胚同构于一个特定的、已解出的代表流形。

定理 7-5（M. Obata）：在紧的、可定向流形 M 上存在一个到球面 O 的同胚映射的充分必要条件是：存在非常数函数 Φ 使

$$\Delta\Phi = \lambda\Phi \tag{7-63}$$

存在非常数函数满足 7-63 说明流形 M 是可积的。我们有

命题 7-6：可积是拓扑性质。

我们知道可积的微分方程经过一个微分同胚映射后仍然可积，所以可积是拓扑性质。

命题 7-7：存在非常数函数满足 7-63 是拓扑性质。

证明：设流形 M 到流形 O 的等距微分同胚映射为 $F: O \to M$，由于 Δ 算子和常数 λ 都是不变算子

$$F^* \Delta\Phi' = \Delta F^* \Phi' = \lambda F^* \Phi' \tag{7-64}$$

或

$$\Delta g = \lambda g \qquad g = F^* \Phi' \tag{7-65}$$

可见，与 M 等距同胚的流形 O 上存在非常数函数 g 使 7-65 成立。所以，存在非常数函数使 7-63 成立确实是拓扑性质。**证完。**

因此，从 Obata 定理可以推论具有拓扑性质：紧致、可定向、可积、存在非零函数满足 7-63 的流形 M 必等距同胚于球面 O。或者说，所有紧致、可定向、可积、存在非零函数满足 7-63 的流形相互同胚同构。如果我们解决了 m 维球面上的物理问题，就解决了这个 m 维同胚流形束中所有的物理问题。

类似地，如果两个同构流形之间的映射不是微分同胚，就说这两个流形同伦同构。我们同样可以定义同伦流形束和同伦束流形的概

念。研究同伦束流形的目的是寻找一组足以确定一个同伦流形束的伦型性质，用以判断某个给定的流形是否同伦同构于一个特定的代表流形。同伦映射是 Lie 代数之间的同态，$f_*:\mathfrak{g}(O^m)\to\mathfrak{g}(M^n)$，映射的逆和恒等映射都不存在，因此同伦映射不构成群，而是构成所谓半群，对应的束流形也不是我们所定义的微分流形，我们称之为微分半流形。

定义 7-8：称所有同构的物理流形构成的集合为一个物理世界。按照命题 7-1，不同构的流形之间不存在光滑映射，因此不同的物理世界之间不存在光滑映射。

按照定义，两个流形之间的可观测性取决于它们之间是否存在光滑映射。设有两个流形 $M:(G(\mathfrak{g}_1),\phi)$ 和 $N:(G(\mathfrak{g}_2),\phi)$，它们的结构群分别由不同构的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 生成。如果物理量 Φ 在 M 上是可观测的，则除非 Φ 是常数，Φ 在 N 上是不可观测的。结论是极为有趣的：结构群互不同构的两个物理世界是互相不可观测的，我们可以构造互相不可观测的流形或平行的物理世界，一个在 $M(G(\mathfrak{g}_1),\phi)$ 上的观测者看不见 $N(G(\mathfrak{g}_2),\phi)$ 上发生的物理事件，虽然他们处在同一个几何空间中，甚至可以有相同的局部物理定律。若 $N_1:(H_1,\phi)$ 和 $N_2:(H_2,\phi)$ 为 $M:(G,\phi)$ 的两个不同构的不变子流形，显然 N_1 和 N_2 是互相不可观测的。但是 M 上的一个观测者却可以同时观测到 N_1 和 N_2 上发生的物理事件。如果两个物理世界的结构群各有一个同构的子群，则它们之间是部分可观测的。

假如两个流形 M 和 N 同构，一定存在光滑映射 $F:M\to N$。如果 F 还是一个微分同胚，则 M 和 N 是互相可以观测的。如果 F 不是微分同胚，例如 $m=\dim(M)<n=\dim(N)$，则我们可以用 F^* 把 M 上的协变张量映射到 N 上去，

$$F^*\omega=a_j\frac{\partial x^j}{\partial y^a}\mathrm{d}y^a\quad \omega=a_j\mathrm{d}x^j\in\mathfrak{g}^*(M)\tag{7-66}$$

$$j = 1,2,\cdots,m \qquad \alpha = 1,2,\cdots,n$$

这里$\{x^j\}$和$\{y^a\}$分别是M和N上的对应坐标。由于F不是微分同胚，逆向的映射是不存在的。同样，我们可以用F_*把N上的逆变张量映射到M上去，

$$F_* Y = b^a \frac{\partial x^j}{\partial y^a} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$Y = b^a \frac{\partial}{\partial x^a} \in \mathfrak{g}(N) \tag{7-67}$$

逆向的映射也是不存在的。这意味着一个在N上的观测者可以看到M上的协变张量；而一个在M上的观测者却不能看到N上协变张量。对逆变张量则有相反的结论。

那么，如果$F:M \to N$是等距微分同胚，M和N是否一定可以互相观测呢？我们知道任何 Lie 群的酋表示有两个互相不连通的分支u_*^+和u_*^-

$$\det[u_*^+] = 1 \tag{7-68}$$

$$\det[u_*^-] = -1 \tag{7-69}$$

因此，u_*^+连通的微分方程子集ϕ^+和u_*^-连通的微分方程子集ϕ^-之间是不连通的。换言之，一个物理世界可以分解为互为镜像、互不连通的两部分。我们称u_*^+对应的分支是阳分支，u_*^-对应的分支为阴分支。这两个分支之间存在光滑映射，那就是空间反演。但是空间反演是不能从$\mathfrak{g}(M)$生成的，所以互不连通的两部分在一般情况下是互相不可观测的，除非我们能够生成空间反演。可见，如果流形的结构群是多连通的，我们可以把流形分割为多个子流形来研究，因此可以认为我们所研究流形都是单连通的。

求M的结构群时，如果已知同胚映射$F:O \to M$，可以直接从O的结构群通过映射得到M的结构群。把 7-44 简写为

$$\boldsymbol{x} = F(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{C}) \tag{7-70}$$

将 6-41 代入得

$$\boldsymbol{x} = F(e^{At}\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{C}) = F(e^{\sum_{\alpha=1}^{m}\mu^\alpha A_\alpha t}\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{C}) \tag{7-71}$$

设定位为当 $t = 0$ 时

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 \tag{7-72}$$

从 7-70 可得

$$\boldsymbol{x}_0 = F(\boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{C}) \tag{7-73}$$

解出 $\boldsymbol{y}_0$ 代入 7-71 就可得到所要的局部群元。

第八章　酉表示和等距微分同胚

尽管结构群可以有很多种表示，我们最感兴趣的是结构群的酉表示和幺正表示。在第六章中我们已经求出了结构群的表示，现在我们要求出结构群的酉表示。在本章中我们假定 $m = n$，F 是微分同胚。$[u_.]$ 是 G 在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的不可约表示，$[v_.]$ 是 G 在 $\mathfrak{g}(O)$ 上的不可约表示。

命题 8-1：如果 $[v_.]$ 是酉表示，当且仅当 $F: O \to M$ 是等距微分同胚的时候，$[u_.]$ 也是酉表示。

证明：由 7-60

$$[u_.] = J[v_.]J^{-1} \tag{8-1}$$

得到

$$[u_.]^+ = [J^{-1}]^+ [v_.]^+ (J)^+ \tag{8-2}$$

和

$$[u_.]^{-1} = J[v_.]^{-1}J^{-1} \tag{8-3}$$

如果

$$[v_.]^{-1} = [v_.]^+ \qquad J^+ = J^{-1} \tag{8-4}$$

则 8-2 和 8-3 的右端相等，因此有

$$[u_.]^{-1} = [u_.]^+ \tag{8-5}$$

反之若

$$[v_.]^{-1} = [v_.]^+ \tag{8-6}$$

$$[u_.]^{-1} = [u_.]^+ \tag{8-7}$$

成立，则

$$J[v_.]^{-1}J^{-1} = (J^{-1})^+ [v_.]^+ J^+ \tag{8-8}$$

或

$$[v_.]J^+ J = J^+ J[v_.] \tag{8-9}$$

由 $[v_.]$ 是不可约表示，根据 Schur 引理[6]，$J^+ J$ 必为单位矩阵的常数倍，不失一般性，令

$$J^+ J = \delta \qquad 或 \qquad J^+ = J^{-1} \qquad \text{证完。} \tag{8-10}$$

任给矢量 $$X = a^j(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{8-11}$$

其特征线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = a^j(\boldsymbol{x}) \tag{8-12}$$

$$x^j\big|_{t=0} = x_0^j \tag{8-13}$$

从 8-12 和 8-13 可以求出特征线

$$x^j = x^j(\boldsymbol{x}_0, t) \tag{8-14}$$

关于 $\boldsymbol{x}_0$ 微分 8-14，可以求出单参数子群的一个表示$\frac{\partial x^j}{\partial x_0^k}$，如果流形是二阶以上可微的，微分算子$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\partial}{\partial x_0^k}$是可交换的，微分 8-12

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^j}{\partial x_0^k} = \frac{\partial a^j(\boldsymbol{x})}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x_0^k} \tag{8-15}$$

令矩阵 $$\Lambda = [\frac{\partial x^j}{\partial x_0^k}] \tag{8-16}$$

把 8-14 代入 $a^j(\boldsymbol{x}) = a^j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t))$，令函数矩阵

$$A(t) = [\frac{\partial a^j(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t))}{\partial x^i}] \tag{8-17}$$

把 8-15 写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t} = A(t)\Lambda \tag{8-18}$$

$$\Lambda\big|_{t=0} = \delta \tag{8-19}$$

这是线性齐次常微分方程组，由于 $\det(\Lambda) \neq 0$，Λ 必为 8-18 的基解矩阵。

命题 8-2：若矩阵 $A(t)$ 是反 Hermite 矩阵，则 8-18、8-19 的一个基解矩阵是酉矩阵。

证明：用共轭转置算子作用于 8-18 得到

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda^{+}}{\mathrm{d}t} = \Lambda^{+} A^{+}(t) = -\Lambda^{+} A(t) \tag{8-20}$$

联立 8-18 和 8-20

$$-(\Lambda^{+})^{-1}\frac{\mathrm{d}\Lambda^{+}}{\mathrm{d}t} = A(t) = \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}\Lambda^{-1} \tag{8-21}$$

或 $$\frac{\mathrm{d}(\Lambda^{+}\Lambda)}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{+}\Lambda = C \tag{8-22}$$

由于 $$(\Lambda^{+}\Lambda)^{+} = \Lambda^{+}\Lambda = C \tag{8-23}$$

所以 C 是常数 Hermite 矩阵。从齐次线性常微分方程组的理论[4] 我们知道，如果 B 是任意非奇异常数矩阵，则 ΛB 也是基解矩阵，我们希望取适当的 B 使得 $[u_{\cdot}] = \Lambda B$ 是酉矩阵，

$$[u_{\cdot}]^{+}[u_{\cdot}] = \delta \tag{8-24}$$

从 8-23 知道，8-24 成立的充分必要条件是对某一个 t_0 有

$$[u_{\cdot}(t_0)]^{+}[u_{\cdot}(t_0)] = \delta \tag{8-25}$$

如果我们取

$$B = \Lambda^{-1}(t_0) \tag{8-26}$$

$$[u_{\cdot}] = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(t_0) \tag{8-27}$$

则 8-27 满足 8-25，而且 8-27 仍然是 8-18 的基解矩阵，8-27 就是我们所求的酉表示。如果是求代表流形 O 上结构群的酉表示，8-18 中的 A 是常数矩阵，从

$$(e^{At})^{+} = e^{A^{+}t} = e^{-At} = (e^{At})^{-1} \tag{8-28}$$

直接可以得到结论：如果 A 是反 Hermite 矩阵，那么结构群的表示 $[v_{\cdot}] = e^{At}$ 是酉表示。**证完。**

设 $A_j \in A(\mathfrak{g})$，(A_j span $A(\mathfrak{g})$ $j = 1,2,\cdots,m$) 是 $\mathfrak{g}$ 的表示，则 A_j 满足

$$[A_j, A_k] = C^{i}_{jk}A_i \qquad C^{i}_{jk} \in R \tag{8-29}$$

定义 $A(\mathfrak{g})$ 的转置共轭代数 $A^{+}(\mathfrak{g})$，任何 $A^{+}_j \in A^{+}(\mathfrak{g})$，($A^{+}_j$ span $A^{+}(\mathfrak{g})$，$j = 1,2,\cdots,m$) 满足

$$[A_j^+, A_k^+] = -C_{jk}^i A_i^+ \tag{8-30}$$

8-30 是直接对 8-29 作共轭转置得到的。

命题 8-3：$A(\mathfrak{g})$ 的任何一个元素必然是 $A^+(\mathfrak{g})$ 的一个元素，反之亦然。

证明：注意到 Lie 代数是线性空间，因此 $-A_j \in A(\mathfrak{g})$，令

$$[-A_j, -A_k] = D_{jk}^i(-A_i) \quad D_{jk}^i \in R \tag{8-31}$$

或

$$[A_j, A_k] = -D_{jk}^i A_i \tag{8-32}$$

$$C_{jk}^i = -D_{jk}^i \tag{8-33}$$

我们知道一组结构常数唯一地决定一个 Lie 代数。把 8-33 代入 8-31 并且与 8-30 比较可以看出 $-A_j$ 与 A_j^+ 的对易关系有相同的结构常数，它们张成同一个 Lie 代数，而 $-A_j$ 是 $A(\mathfrak{g})$ 的一组基底，所以，$A(\mathfrak{g})$ 的任何一个元素必然是 $A^+(\mathfrak{g})$ 的一个元素。**证完。**

命题 8-4：

$$\bar{A} = \frac{1}{2}(A - A^+) \tag{8-34}$$

和

$$\bar{A}(t) = \frac{1}{2}[A(t) - A^+(t)] \tag{8-35}$$

分别生成 G 的酉表示 $[v.]$ 和 $[u.]$。

证明：$\bar{A}$ 是反 Hermite 矩阵，从命题 8-3 和 8-2 可以得到 $\bar{A} \in A(\mathfrak{g})$，且

$$[v.] = e^{\bar{A}t} \tag{8-36}$$

是 $\mathfrak{g}(O)$ 上的酉表示。

从 8-1 知道

$$[u.] = J^{-1}[v.]J = J^{-1}e^{\bar{A}t}J = J^{-1}e^{\frac{1}{2}At}JJ^{-1}e^{-\frac{1}{2}A^+t}J \tag{8-37}$$

但是

$$[v'.] = e^{\frac{1}{2}At}, \qquad [v''.] = e^{-\frac{1}{2}A^+t} \tag{8-38}$$

是 $\mathfrak{g}(O)$ 上的表示，J 是矩阵群之间的同构映射，所以

$$[u'.] = J^{-1}e^{\frac{1}{2}At}J \tag{8-39}$$

和

$$[u''.] = J^{-1}e^{-\frac{1}{2}A^{+}t}J \tag{8-40}$$

是 $\mathfrak{g}(M)$ 上的表示，于是

$$[u.] = [u'.][u''.] \tag{8-41}$$

是 $\mathfrak{g}(M)$ 上的表示，

从

$$\frac{\mathrm{d}e^{J^{-1}AJt}}{\mathrm{d}t} = A(t)e^{J^{-1}AJt} \tag{8-42}$$

可得

$$A(t) = \frac{\mathrm{d}(J^{-1}AJt)}{\mathrm{d}t} \tag{8-43}$$

和

$$\bar{A}(t) = \frac{\mathrm{d}(J^{-1}\bar{A}Jt)}{\mathrm{d}t} \tag{8-44}$$

$[u.]$ 是从 $\bar{A}(t)$ 生成的，$\bar{A}(t)$ 是从 $\bar{A}$ 生成的，$[u.]$ 是一个表示，根据命题 8-2，$[u.]$ 是酉表示。**证完。**

这样，我们可以分别求出酉表示 $[v.]$ 和 $[u.]$。再根据命题 8-1，利用线性矩阵方程

$$J[u.] = [v.]J \tag{8-45}$$

求出等距微分同胚 $F. = J:\mathfrak{g}(M) \to \mathfrak{g}(O)$，进而通过映射生成 $\mathfrak{g}(M)$。此时 J 是 t 的函数矩阵。

如果物理问题定义在复流形上，以上我们已经求出了 M 的结构群的酉表示，及其到代表流形的等距微分同胚。如果物理问题定义在实流形上，我们首先求出 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 的实形式及其实表示[5]，这时 $A_j \in A(\mathfrak{g})$，(A_j span $A(\mathfrak{g})$ $j = 1,2,\cdots,m$) 都是实矩阵，以上各命题和公式中的共轭转置都成为转置，

$$A^{+} = A^{T} \tag{8-46}$$

对应的酉表示成为幺正表示，复等距微分同胚成为实等距微分同胚。对应的命题和公式很容易得到，不再赘述。

我们再次指出，$T(M)$ 的维数 m 与局部微分方程的维数 n 不是

一回事。在我们关于微分流形的定义里，m 可以不等于 n。但是如果 G 在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的表示是酉表示，按照命题 8-1，映射 F 是等距微分同胚，F 的 Jacobi 是 $m \times m$ 可逆矩阵，所以一定有 $m = n$。在这种情况下，G 在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的表示是伴随表示。

在第七章中我们采用的定向是 $Y \to X$，在求解实际物理问题的时候经常遇到的情况是已知 M 上的一个 p 形式 η 而不是 1 矢量，而且一般 $\eta \in T^{*p}(M)$。在这种情况下如何求映射 $F: O \to M$ 呢？

首先，我们可以从 η 得到 1 形式

$$\omega = \mathrm{d} * (\eta \wedge * \eta) \tag{8-47}$$

假如 $\omega \in \mathfrak{g}^*(M)$，$\theta^k$ 满足 6-20，我们可以取定向 $\theta \to \omega$

$$\theta = \beta_k \theta^k \quad \beta_k \in R \quad \theta \in \mathfrak{g}^*(O) \tag{8-48}$$

设

$$\omega = a_a \mathrm{d}x^a \in \mathfrak{g}^*(M) \tag{8-49}$$

则

$$\frac{\mathrm{d}x^a}{\mathrm{d}t} = a_a \tag{8-50}$$

的解是一个单参数子群

$$x^a = u^a(x_0, t) \tag{8-51}$$

设

$$\theta = b_k \mathrm{d}y^k \tag{8-52}$$

也生成单参数子群

$$y^j = v^j(y_0, t) \tag{8-53}$$

设

$$\omega^j \text{ span } \mathfrak{g}^*(M) \tag{8-54}$$

$$\omega = \mu_j \omega^j \qquad \mu_j \in R \tag{8-55}$$

$$\theta^j \text{ span } \mathfrak{g}^*(O) \tag{8-56}$$

$$\theta = \mu_j \theta^j \qquad \mu^j \in R \tag{8-57}$$

令 t 趋于 0 容易证明从 $\mathfrak{g}^*(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(O)$ 的任意元素生成的单参数子群互相连通，因此所有这些子群构成 M 和 O 的结构群，我们可以从其中任何一对对应群元出发求映射 F。微分 8-51 和 8-53 可以得到

$$[u^*]^a_\beta = \frac{\partial x^a}{\partial x^\beta_0} \tag{8-58}$$

$$[v^*]_k^j = \frac{\partial y^j}{\partial y_0^k} \tag{8-59}$$

用 u^* 把 ω 映射到 P^m 上去,

$$u^*(\omega) = a_\alpha [u^*]_\beta^\alpha \mathrm{d}x^\beta \tag{8-60}$$

再用 F^* 把 ω 映射到流形 O 的 P^m 上去,

$$F^*[u^*(\omega)] = a_\alpha [u^*]_\beta^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \mathrm{d}y^k = \theta \tag{8-61}$$

我们还可以用另一种方法完成这个映射,那就是先用 F^* 把 ω 从 M 的开域 U 映射到 O 的开域 V,再用 v^* 从开域 V 映射到与 M 对应的 O 的 P^m 上去

$$v^*[F^*(\omega)] = a_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}[v^*]_k^j \mathrm{d}y^k = \theta \tag{8-62}$$

物理量是唯一的,两式比较可得

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j}[v^*]_k^j = [u^*]_\beta^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial y^k} \tag{8-63}$$

写成矩阵形式为

$$J[v^*] = [u^*]J \tag{8-64}$$

从此式可以解出

$$J = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} = F^*: \mathfrak{g}^*(O) \to \mathfrak{g}^*(M) \tag{8-65}$$

如果已知的是1形式 $\eta \in T^*(M)$,原则上我们也可以采用定向 $\theta \to \eta$,分别求出对应的单参数子群的表示 $[v^*]$ 和 $[\varphi_t^*]$,$[v^*]$ 和 $[\varphi_t^*]$ 之间有与 8-64 类似的关系

$$[v^*]J = J[\varphi_t^*] \tag{8-66}$$

只是由此求出的映射不是 $F^*: \mathfrak{g}^*(O) \to \mathfrak{g}^*(M)$,而是

$$J = AF^*: \mathfrak{g}^*(O) \to \mathfrak{g}^*(M) \to T^*(M) \tag{8-67}$$

其中

$$A = [A_j^k(x)]: \mathfrak{g}^*(M) \to T^*(M) \tag{8-68}$$

用映射 J 可以从 m 个 θ^k span $\mathfrak{g}^*(O)$ 生成 m 个 η^k span $T^*(M)$,如

果 $m = n$,还可以从 m 个 Y^k span $\mathfrak{g}(O)$ 生成 m 个 Z^k span $T(M)$。η^k 不满足 2-47,而满足 2-48。理论上,我们可以利用命题 2-26 提供的公式 2-58 解出 $[A_i^k(x)]$,然后生成满足 2-47 的 m 个 ϑ^k span $\mathfrak{g}^*(M)$。只是这个方法过于烦琐,比较可取的是直接把 η 表示为

$$\eta = \rho\omega \qquad \omega \in \mathfrak{g}^{*p}(M) \tag{8-69}$$

例如在流体绕流问题中,通常给定的边界条件是动量,那么上式中的 ρ 就是质量密度,我们可以直接得到 1 形式

$$\vartheta = \mathrm{d} * (\omega \wedge * \omega) \in \mathfrak{g}^*(M) \tag{8-70}$$

至此,我们已经生成了流形 M 到代表流形 O 的等距微分同胚 $J = F^*$、M 的结构群的酉表示或幺正表示以及 $\mathfrak{g}(M)$。虽然其中一些步骤不一定能够解析求出,例如 8-18 式,但是每一步的解在数学上都是存在且唯一的,因此至少我们可以放心地用数值方法求解。

第九章　流形上的微积分

对开域上的局部物理量直接进行古典微分是毫无意义的，因为微分的结果一般不再是物理量。从张量几何我们知道，能够使微分的结果仍然满足相同变换规律的微分运算是协变微分。

任何 X，

$$X = a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \in \mathfrak{g}(M) \tag{9-1}$$

满足

$$L_X X = [X, X] = 0 \tag{9-2}$$

如果$\{x^k\}$和$\{y^j\}$分别是不同开域上的坐标，从 X 可以生成局部 Lie 群

$$y^j = u^j(x, t) \tag{9-3}$$

及其表示

$$[u_*] = [\frac{\partial y^j}{\partial x^k}] \tag{9-4}$$

9-3 是微分同胚，所以有

$$[u_*]^{-1} = [\frac{\partial x^i}{\partial y^j}] \tag{9-5}$$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^i}{\partial y^j} = \delta^i_k \tag{9-6}$$

从 9-2 可得

$$L_X X = \{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([u_*]X)\}_{t=0} = [u_*]^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([u_*]X) = 0 \tag{9-7}$$

如果流形函数是二阶可微的，从流形函数的定义

$$W = C \tag{9-8}$$

我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{\partial W}{\partial x^k}] = \frac{\partial}{\partial x^k}[\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}] = 0 \tag{9-9}$$

则 $$L_X X = [u_{\cdot}]^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([u_{\cdot}]X)$$

$$= [u_{\cdot}]^{-1}\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([u_{\cdot}]a^k)\}\frac{\partial}{\partial x^k} = 0 \tag{9-10}$$

于是 $$L_X a^k = [u_{\cdot}]^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([u_{\cdot}]a^k)$$

$$= \frac{\mathrm{d}a^k}{\mathrm{d}t} + [u_{\cdot}]^{-1}\frac{\mathrm{d}[u_{\cdot}]}{\mathrm{d}t}a^k = 0 \tag{9-11}$$

上式可以写成

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\frac{\partial y^j}{\partial x^k}a^k] = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} + a^k\frac{\mathrm{d}(\frac{\partial y^j}{\partial x^k})}{\mathrm{d}t}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = 0 \tag{9-12}$$

或 $$\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} + a^k\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^n\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-13}$$

定义 9-1:流形的联络为

$$\Gamma^i_{kn} = \frac{\partial^2 y^j}{\partial x^k\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tag{9-14}$$

则 $$\frac{Da^i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} + a^k\Gamma^i_{kn}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-15}$$

或者写成绝对导数

$$\frac{Da^i}{\mathrm{d}t} = (\nabla_k a^i)\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-16}$$

这里的 ∇_k 就是协变导数。从 9-14 显然有:

命题 9-2:如果$[u_{\cdot}]$是常数矩阵,则联络系数为零。如果 G 有二阶以上的连续导数,则联络是无挠的,即

$$\Gamma^i_{kn} = \Gamma^i_{nk} \tag{9-17}$$

微分 9-6 可得

$$\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^k\partial x^n}\frac{\partial x^i}{\partial y^j} + \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^n\partial y^j} = 0 \tag{9-18}$$

所以还有

$$\Gamma^i_{kn} = -\frac{\partial y^j}{\partial x^k}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^n \partial y^j} \tag{9-19}$$

从 9-16 知道，在可积流形上任何 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 关于联络是自平行的[20]。由此还可以

定义 9-3： $X // Y \Leftrightarrow [X, Y] = 0$ (9-20)

把 X 的特征线方程

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = a^i \tag{9-21}$$

代入 9-15 得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{kn}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-22}$$

这正是测地线方程，由此我们知道，可积流形上任何 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 的积分曲线是测地线，或者说，流形上的特征线是测地线。

令 $\omega = a_j \mathrm{d}x^j \in \mathfrak{g}^*(M)$ (9-23)

ω 与 X 的全微分对偶为

$$< X, \omega > = a^j a_j = C \qquad \in R \tag{9-24}$$

$$L_X < X, \omega > = L_X(a^j a_j) = (L_X a^j) a_j + a^j (L_X a_j) = 0 \tag{9-25}$$

所以 $L_X a_j = 0$ (9-26)

设 X 生成单参数子群 9-3，及其在 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上的表示

$$[u^*]^{-1} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \tag{9-27}$$

$$[u^*] = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \tag{9-28}$$

可以得到

$$L_X a_j = [u^*]^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u^*] a_j\right) = 0 \tag{9-29}$$

$$L_X a_k = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial x^k}{\partial y^j}a_k\right] = \frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^n \partial y^j}a_k\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = 0$$

或
$$\frac{Da_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}a_i}{\mathrm{d}t} - a_k\Gamma^k_{in}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{9-30}$$

必须指出，尽管以上关于联络系数的定义与流形是否可积无关，但是在不可积流形上 9-9 不成立，所以 9-16 也不成立。对不可积流形有

$$\frac{\mathrm{d}a^i}{\mathrm{d}t} = -a^k\Gamma^i_{kn}\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}t} - a^k\Gamma^i_k \tag{9-31}$$

其中
$$a^k\Gamma^i_k\frac{\partial W}{\partial x^i} = a^i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial W}{\partial x^i} \tag{9-32}$$

命题9-4：设 ϕ 是$M(G,\phi)$ 上的局部物理定律，$Z \in T(M)$ 与 ϕ 等价，则

$$L_Z\phi = 0 \tag{9-33}$$

证明：按照命题 4-5，ϕ 可以表示为

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{n!}Z^n = 0 \tag{9-34}$$

从$[Z,Z]=0$和 Lie 导数满足的 Leibnitz 法则可以知道9-33成立。从这个命题可以推论，M 上的任何逆变张量 T 满足

$$L_Z T = 0 \qquad T = Z\otimes Z\otimes\cdots\otimes Z \tag{9-35}$$

如果 η 与 T 对偶，

$$< T,\eta > \in R \tag{9-36}$$

则
$$L_Z\eta = 0 \tag{9-37}$$

以上结论对 $\mathrm{g}^p(M)$ 和 $\mathrm{g}^{*p}(M)$ 同样适用。**证完。**

对物理定律的研究主要是在单位元开域上进行的，适当运用 Lie 群、Lie 代数、张量和微分几何工具，我们已经对流形的局部性质有了比较深刻的了解。为了能够研究流形的整体或全局性质，特别是为了能从给定的边界条件反演出物理场，还必须能够实际计算出流形上的积分，而不是仅仅满足于给出一个抽象的定义。

在微分几何中，流形上的积分被定义为[20],[1]

$$\int_M \omega = \sum_j \int_{U_j} \pi_j \omega_j \tag{9-38}$$

其中 $\Sigma:\{U_j\}$ 是 M 上的一个开覆盖，$\{\pi_j\}$ 是从属于 Σ 的一个单位分解，

$$\omega_j = a_{k_1 \cdots k_m} \mathrm{d}x^{k_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{k_m} \tag{9-39}$$

是 ω 在 U_j 上的限制。尽管每一个 U_j 上的积分是可以算出来的。可是开覆盖和单位分解的任意性会给实际计算 M 上的积分带来误差，更主要的是通常在积分的时候我们还未求出 M 的结构群 G，无法预先知道给定开域会与那些开域重合，无法设定单位分解 π_j，也就无法进行积分。于是我们要问，能否把 M 上的积分变为 P^m 上的积分呢？

设单位元开域上的局部微分方程

$$X(W) = a^k \frac{\partial W}{\partial x^k} = 0 \qquad k = 1,2,\ldots,m \tag{9-40}$$

其特征方程组

$$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = a^k(x, \mu) \tag{9-41}$$

设方程组的解为

$$x^k = u^k(t, x_0, \mu) \tag{9-42}$$

首先，我们试图把 9-42 拓展到更大的区域上去。按照常微分方程组的延拓定理[23],[22]，如果 $a^k(x,\mu)$ 满足 Lipschitz 条件，我们总是可以延拓 9-42 直至碰到流形的边界以及趋于无穷或孤立奇点。以绕流解为例，9-42 总可以延拓到任意接近 $\partial\Omega$ 和 ∞；以黑洞解为例，总可以延拓到任意接近孤立奇点 $r = 0$ 和 ∞。既然 9-42 是可以延拓的，那么设定一个沿特征线的单位分解之后，9-40 也是可以延拓的。给定不同的群参数，9-40 可以沿任何特征线延拓。由于任何张量都可以通过矢量的对偶、张量积以及对称和反对称运算得到，所以任何局部张量都可以在 P^m 上延拓。

除了延拓以外，我们还可以用单位元开域上的 X 和群元9-42在 P^m 中利用单位分解拼接出全局矢量 $\bar{X}$。同样，也可以把单位元开域上的任何张量 T 拼接为P^m 上的全局张量。以 M 上的 m 形式ω 为例，拼接出的 $\bar{\omega}$ 在P^m 上可以是点点不可微的（古典意义下），因为任何一点都可以是拼接的接缝。但是积分在每一个 U_j 上存在，如果流形是紧致的，则存在一个有限开覆盖，9-38的右端是有限加和，所以 M 上的积分存在。如果流形不是紧致的，则还需要收敛性证明。在这里，我们假定积分总是收敛的。从多重积分的换元公式知道，在 $U_j \subset R^m$ 上的积分与$u(U_j) \subset P^m$ 上的积分相等，

$$\int_M \omega = \sum_j \int_{U_j} \pi_j \omega_j = \sum_j \int_{u(U_j)} \pi_j u^*(\omega_j) = \int_{u(M)} \bar{\omega} \qquad (9\text{-}43)$$

其中

$$\bar{\omega} = \sum_j \pi_j u^*(\omega_j) \qquad (9\text{-}44)$$

就是 ω 在P^m 中拼接出来的整体 m 形式场。如果流形是没有洞的，

$$P^m = u(M) = \bigcup_j u(U_j) \qquad (9\text{-}45)$$

重复计算的积分被单位分解扣除。现在，在 P^m 上有两个全局意义下的m 形式，一个是从每一个 U_j 映射到P^m，用单位分解拼接出来的 $\bar{\omega}$，另一个是从单位元开域延拓到 P^m 上任意一点的ω。但是物理量是唯一的，所以在 P^m 上任意一点必然有

$$\omega = \bar{\omega} \qquad (9\text{-}46)$$

所以

$$\int_M \omega = \int_{P^m} \omega \qquad (9\text{-}47)$$

P^m 是欧氏空间，上面的积分不难计算。

令 Ω 是M 的一个子集。Ω 是在M 的每一个开域上取一个子域构成的集合，而且这些子域在 P^m 上的像不能覆盖整个P^m。如果积分是在 Ω 上进行的，定义特征函数

$$\lambda = \begin{cases} 1 & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases} \qquad (9\text{-}48)$$

我们有

$$\int_{\Omega}\omega = \int_{M}\lambda\omega = \sum_{j}\int_{U_j}\lambda\pi_j\omega_j$$

$$= \sum_{j}\int_{u(U_j)}\lambda\pi_j u^*(\omega_j) = \int_{P^m}\lambda\bar{\omega} = \int_{P^m}\lambda\omega \qquad (9\text{-}49)$$

上式也可以表示为

$$\int_{\Omega}\omega = \sum_{j}\int_{U_j\cap\Omega}\pi_j\omega_j = \sum_{j}\int_{u(U_j\cap\Omega)}\pi_j u^*(\omega_j) = \int_{S}\bar{\omega} = \int_{S}\omega \qquad (9\text{-}50)$$

其中　$$S = \bigcup_j u(U_j \cap \Omega) \qquad (9\text{-}51)$$

是 Ω 在 P^m 中的像。在物理问题中，通常都是直接给出 S 而不是 Ω。例如在绕流问题中，绕流物体通常不是在许许多多的局部坐标中给出的，而是在一个整体的正交坐标中给出的。取这个坐标为单位元开域上的局部坐标，在这个坐标中把物理量延拓到整个 P^m 就可以直接计算 S 上的积分。只要 9-50 的左端积分中不包括边界或奇点，那么两端的积分就相等。

如果积分是定义在 M 的 p 链 C 上，类似地有

$$\int_{C}\omega^p = \sum_{j}\int_{U_j\cap C}\pi_j\omega_j^p = \sum_{j}\int_{u(U_j\cap C)}\pi_j u^*(\omega_j^p)$$

$$= \int_{S^p}\bar{\omega}^p = \int_{S^p}\omega^p \qquad (9\text{-}52)$$

其中　$$S^p = \bigcup_j u(U_j \cap C) \qquad (9\text{-}53)$$

是 C 在 P^m 中的像。同样，在物理问题中，通常都是直接给出 S^p 而不是 C。

从 9-38、9-49 和 9-52 可以看出，积分的定义与结构群无关。所以尽管我们在计算积分的时候总是用 $u \in G$ 把被积形式映射到 P^m 上去，尽管左移动和右移动会改变群元与开域之间的对应关系，我们有

命题 9-5：流形上任何物理量的积分是结构群的运动不变量。

由此可以导出流形上的守恒定律，例如质量守恒、能量守恒、电荷守恒等。

命题 9-5 的意义是物理量的积分在左移动或右移动下不变，这与我们看到的物理现实是一致的，例如，我们乘飞船观测一颗行星，在飞船或行星移动之后，我们认为观测到的仍然是同一颗行星，尽管它在我们眼中的形状和大小变化了。我们认为这种变化仅仅是由于开域以不同顺序拼接造成的，物理量的积分作为守恒量并没有变化。

有两种不同的运动需要区分，那就是在流形上的任意运动和沿特征线的运动，二者的区别在于：生成任意运动的群元的群参数可以是变化的，而生成沿特征线的运动的群元的群参数是常数。理论上，一个观测者可以运动到流形的任何位置，产生这样的运动的可能是结构群的任意群元；对一个特定的流形来说，定义流形的矢量或 1 形式是确定的，这个矢量或 1 形式只能生成结构群的一个单参数子群，因此流形上的一个质点只能沿着特征线运动，产生这样的运动的只能是结构群的一个单参数子群中的元素。无论是观测者的一个任意运动还是质点的一个沿特征线的运动都是结构群的群元引起的，因此它们都遵守上述守恒定律。例如，在研究流体运动的时候，我们可以在任何坐标中计算一个给定流体团的能量，在任何坐标中计算出来的值都是相等的。同样，当这团流体在流场中运动以后，它的能量也应当守恒，如果能量发生了变化，就必然伴随着能量的释放或吸收。

第十章　微分流形的几何性质

如果生成 G 的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的，$\mathfrak{g}$ 上有对称负定的 Cartan-Killing 度规

$$G_{ik} = C^l_{im} C^m_{kl} \tag{10-1}$$

其中 C^l_{im} 是 $\mathfrak{g}$ 的结构常数。存在 G_{ik} 的逆 G^{jk} 满足，

$$G^{jk} G_{ik} = \delta^j_i \tag{10-2}$$

当已知 $\mathfrak{g}$ 是一个 r 秩单纯 Lie 代数时，从 Lacah 定理就可以直接确定 r 个 Casimir 算子[6],[17]。如果 $r = 1$，我们在 $\mathfrak{g}(M)$ 上有唯一的 Casimir 算子

$$C_2 = G^{jk} X_j X_k \tag{10-3}$$

Casimir 算子的全微分对偶形式为

$$C_2^* = G_{jk} \vartheta^j \vartheta^k \tag{10-4}$$

10-3 和 10-4 分别是逆变和协变度规张量。于是我们可以定义自然基底下的度规张量分量

$$g_{jk} \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k = C_2^* = G_{lm} a^l_j a^m_k \mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k \tag{10-5}$$

$$g_{jk} = G_{lm} a^l_j a^m_k \tag{10-6}$$

和它的逆

$$g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} = G^{lm} \bar{a}^j_l \bar{a}^k_m \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{10-7}$$

$$g^{jk} = G^{lm} \bar{a}^j_l \bar{a}^k_m \tag{10-8}$$

令

$$\bar{A} = [\bar{a}^l_j] \tag{10-9}$$

$$A = [a^k_m] \tag{10-10}$$

写成矩阵形式

$$[g_{jk}] = A^T [G_{lm}] A \tag{10-11}$$

$$[g^{jk}] = \bar{A}^T [G^{lm}] \bar{A} \tag{10-12}$$

注意到基底矩阵是可逆的，显然有

$$g^{jk}g_{ik} = \delta^j_i \tag{10-13}$$

根据矩阵变换的惯性定理，在 A 和 $\bar{A}$ 的合同变换下$[g_{jk}]$和$[g^{jk}]$仍然是对称负定的。我们完全可以按照通常的习惯给度规乘以 -1，使度规变为正定的，所以，

命题 10-1：只要结构群是半单的，M 就是 Riemann 流形。

定义 10-2：弧长时间 t 满足

$$ds = c\,dt = \sqrt{-g_{jk}dx^j dx^k} \tag{10-14}$$

或

$$t = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}\sqrt{-g_{jk}dx^j dx^k} \tag{10-15}$$

其中 c 是个大于零的常数。显然，由于$[-g_{jk}]$是对称正定矩阵，t 是单调增加的。弧长是流形上的不变量，因而弧长时间也是流形上的不变量。在第四章中用到关于时间的导数；此外在第六章关于结构群的推导中，我们并未指出特征线方程里的 dt 是如何定义的。事实上，矢量的特征线方程必然是物理定律，而群表示直接作用在$\{dx^k\}$上，为了保持$\frac{dx^k}{dt}$在G变换下的可观测性质，dt 必然是流形上的标量物理量的微分。我们取 dt 为弧长时间的微分，在本书中所有出现的 dt 都是指弧长时间的微分。

从 Casimir 算子的性质我们知道度规张量与任何 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 是可对易的，

$$[X, C_2] = 0 \tag{10-16}$$

按照 Schur 引理，度规张量是恒等算符的常数倍，

$$L_X C_2 = 0 \Rightarrow L_X\left(g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = 0 \tag{10-17}$$

或

$$[u_{\cdot}]^{-1}\frac{d}{dt}\left\{[u_{\cdot}]g^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^k}\right\}$$

$$= \frac{\partial x^u}{\partial y^s}\frac{\partial x^v}{\partial y^t}\frac{d}{dt}\left\{g^{jk}\frac{\partial y^s}{\partial x^j}\frac{\partial y^t}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial y^s}\frac{\partial}{\partial y^t}\right\} = 0 \tag{10-18}$$

如果流形是可积的，考虑到 9-9，利用 Leibnitz 法则对大括号中的各项分别微分

$$\frac{\mathrm{d}g^{uv}}{\mathrm{d}t}+g^{uk}\frac{\partial x^{v}}{\partial y^{i}}\frac{\partial^{2}y^{i}}{\partial x^{k}\partial x^{h}}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}+g^{jv}\frac{\partial x^{u}}{\partial y^{s}}\frac{\partial^{2}y^{s}}{\partial x^{j}\partial x^{h}}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{10-19}$$

注意到其中只带有哑指标的项是可以交换位置的，把联络的定义代入上式可以得到

$$\frac{\mathrm{d}g^{uv}}{\mathrm{d}t}+g^{uk}\Gamma_{kh}^{v}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}+g^{jv}\Gamma_{jh}^{u}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{10-20}$$

对 10-13 求 Lie 导数，考虑到 10-18 可以得到

$$\begin{aligned}L_{X}g_{jk}&=[u^{*}]^{-1}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u^{*}]g_{jk})\\&=\frac{\partial y^{u}}{\partial x^{j}}\frac{\partial y^{v}}{\partial x^{k}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial x^{m}}{\partial y^{u}}\frac{\partial x^{n}}{\partial y^{v}}g_{mn})=0\end{aligned} \tag{10-21}$$

容易推出

$$\frac{\mathrm{d}g_{jk}}{\mathrm{d}t}-g_{ji}\Gamma_{kh}^{i}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}-g_{ik}\Gamma_{jh}^{i}\frac{\mathrm{d}x^{h}}{\mathrm{d}t}=0 \tag{10-22}$$

关于这一点，微分几何中有专门的术语，那就是

命题 10-3：度规张量关于联络是容许的。

把矢量 X 写作

$$X=g^{jk}a_{k}\frac{\partial}{\partial x^{j}}\quad\in\mathfrak{g}(M) \tag{10-23}$$

从微分几何可以知道[20],[8]，如果度规张量关于联络是容许的，则 X 是 Killing 矢量，满足

$$\nabla_{j}a_{k}-\nabla_{k}a_{j}=0 \tag{10-24}$$

如果已知联络，这个公式可以用于检验已知的 1 形式 $\omega=a_{k}\mathrm{d}x^{k}$ 是否是 $\mathfrak{g}^{*}(M)$ 中的元素。

我们有 Riemman 几何基本定理，

定理 10-4：如果结构群有二阶以上连续导数，可积的 Riemman

流形上存在唯一的无挠容许联络。

证明：按照我们的定义，联络是被结构群在 $\mathfrak{g}(M)$ 上的表示唯一确定的，所以联络是唯一的。在前面的叙述中我们已经知道：如果 G 是二阶以上可微的，这样定义的联络是无挠容许的。**证完**。

如果用协变度规张量与矢量 $X = \alpha^j X_j$ 缩并，

$$< g, X > = < \vartheta^l G_{lm} \vartheta^m, \alpha^j X_j > = \vartheta^l G_{lm} < \vartheta^m, \alpha^j X_j >$$

$$= \vartheta^l G_{lm} \alpha^m = \alpha_l \vartheta^l = \omega \quad \alpha_l = G_{lm} \alpha^m \tag{10-25}$$

可见 X 与协变度规张量的缩并运算就是从 $\mathfrak{g}(M)$ 到 $\mathfrak{g}^*(M)$ 的映射，此外，可以由 ω 与逆变度规张量的缩并运算定义从 $\mathfrak{g}^*(M)$ 到 $\mathfrak{g}(M)$ 的映射。类似地还可以定义度规张量与高阶张量的缩并，这其实就是张量几何中用度规张量升降指标的运算。注意到度规张量与 $\mathfrak{g}(M)$ 的任意元素可交换，升降指标可以对高阶张量的任何一个指标进行。升降指标是张量积和全微分对偶的复合运算，对流形上任何一个开域成立。用升降指标可以把混合张量变为单纯的协变或逆变张量，也就是变为单纯的等价常微分方程或偏微分方程，这样，混合张量也是有意义的了。

我们还可以定义内积 $g(X, Y)$。设 $X, Y \in \mathfrak{g}(M)$

$$X = \alpha^j X_j = \alpha^j a_j^l \frac{\partial}{\partial x^l} = b^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{10-26}$$

$$Y = \beta^k X_k = \beta^k a_k^m \frac{\partial}{\partial x^m} = c^m \frac{\partial}{\partial x^m} \qquad \alpha^j、\beta^k \in R \tag{10-27}$$

定义 10-5：$\mathfrak{g}(M)$ 上的内积

$$g(X, Y) = G_{jk} \alpha^j \beta^k = g_{lm} b^l c^m = < g(X), Y > = < \omega, Y > \tag{10-28}$$

内积就是度规张量与 $\mathfrak{g}(M)$ 中的矢量的张量积的缩并。如果用度规张量对 X 做升指标运算，从上式最后两个等号可以看出内积其实就是 $\mathfrak{g}(M)$ 与 $\mathfrak{g}^*(M)$ 之间的对偶。由于度规是负定的，所以 $g(X, X)$

是负定二次型

$$g(X,X)\leqslant 0 \tag{10-29}$$

等号成立当且仅当 $X=0$。如果

$$g(X,Y)=0 \qquad X\neq Y \tag{10-30}$$

就说 X 与 Y 垂直。设 $\omega,\eta\in\mathfrak{g}^*(M)$

$$\omega=\alpha_j\vartheta^j=a_m\mathrm{d}x^m \qquad \eta=\beta_j\vartheta^j=b_m\mathrm{d}x^m \tag{10-31}$$

$\mathfrak{g}^*(M)$ 上的内积为

$$g(\omega,\eta)=G^{jk}\alpha_j\beta_k=g^{lm}a_lb_m \tag{10-32}$$

同样 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上的内积为负定二次型。如果

$$g(\omega,\eta)=0 \qquad \omega\neq\eta \tag{10-33}$$

就说 ω 与 η 垂直。我们还可以定义高阶张量的内积，例如设 ω 和 η 是 2 形式，

$$\omega=a_{ik}\mathrm{d}x^i\wedge\mathrm{d}x^k \tag{10-34}$$

$$\eta=b_{jl}\mathrm{d}x^j\wedge\mathrm{d}x^l \tag{10-35}$$

则

$$g(\omega,\eta)=g^{ij}g^{kl}a_{ik}b_{jl} \tag{10-36}$$

命题 10-6：$\mathfrak{g}^p(M)$ 及 $\mathfrak{g}^{*p}(M)$ 上的内积是常数。

证明：内积是 $\mathfrak{g}(M)$ 及 $\mathfrak{g}^{*p}(M)$ 上的张量与度规之间的缩并，从命题 3-5 直接可以得出结论。**证完**。

根据这个命题，从

$$L_X[g(X,X)]=L_X<g(X),X>=L_X<\omega,X>=0 \tag{10-37}$$

容易看出

$$L_X[g(X,X)]=\int L_X(g\otimes X\otimes X)$$

$$=\int(L_Xg)\otimes X\otimes X=0\Rightarrow L_Xg=0 \tag{10-38}$$

$$L_X[g(X,X)]=\int L_X(g\otimes X)\otimes X$$

$$= \int (L_X\omega) \otimes X = 0 \Rightarrow L_X\omega = 0 \qquad (10\text{-}39)$$

10-38 再次说明度规张量是容许的，我们把 10-38 写成

$$\left[\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} - g_{ji}\Gamma^i_{kh} - g_{ik}\Gamma^i_{jh}\right]\frac{\mathrm{d}x^h}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (10\text{-}40)$$

10-38 对任何 $X \in \mathfrak{g}(M)$ 成立，$x^h = x^h(t)$ 可以是任意矢量的特征线，因此

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} - g_{ji}\Gamma^i_{kh} - g_{ik}\Gamma^i_{jh} = 0 \qquad (10\text{-}41)$$

由此知道我们的联络正是 Levi-civita 联络，这个联络可以直接从度规张量得到

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right) \qquad (10\text{-}42)$$

而不必计算局部 Lie 群。与 10-42 形成对照的是 $L_XX = 0$ 和 $L_X\omega = 0$ 仅在 X 的特征线上成立，不能把 9-31 分解成

$$\frac{\partial a_i}{\partial x^n} - a_k\Gamma^k_{in} = 0 \qquad (10\text{-}43)$$

到现在为止，我们已经可以求出 Riemman 流形 M 的任何几何性质了，方法如下：首先指定 M 和代表流形 O 上的一对定向矢量 $Y \to X$(或 1 形式 $\theta \to \vartheta$)，分别求出 X 和 Y(或 θ 和 ϑ) 的单参数子群在 $\mathfrak{g}(M)$ 和 $\mathfrak{g}(O)$(或 $\mathfrak{g}^*(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(O)$) 上的表示$[u_*]$ 和$[v_*]$(或$[u^*]$和$[v^*]$)，利用公式 8-1(或 8-64) 可以求出映射 $J = F_*$：$\mathfrak{g}(M) \to \mathfrak{g}(O)$(或 $F^*: \mathfrak{g}^*(O) \to \mathfrak{g}^*(M)$)，从 $\mathfrak{g}(O)$ 映射生成 $\mathfrak{g}(M)$，进而得到 M 的度规张量，然后从 10-42 计算出联络系数。有了度规张量和联络系数，流形上的任何几何性质都可以得到，如曲率张量、Ricci 张量、标量曲率等。这样计算出来的几何性质还只是单位元开域上的几何性质，如果想算出其他开域上的几何性质，需要引用这些几何量在 $u \in G$ 变换下的公式。具体公式可参见任何微分几何教科

书，本书不再赘述。

令 X_j 张成 Lie 代数 $\mathfrak{g}(M)$，

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad C_{ij}^k \in R \tag{10-44}$$

设$[L_k^i]$ 是可逆的常数矩阵，Y_k 满足

$$Y_k = L_k^j X_j \quad \bar{L}_k^i L_l^k = \delta_l^i \tag{10-45}$$

则 $$[Y_i, Y_j] = \bar{D}_{ij}^k Y_k \quad \bar{D}_{ij}^k = L_i^m L_j^n C_{mn}^l \bar{L}_l^k \in R \tag{10-46}$$

从 m 个矢量 X_j 可以积分得到 m 条积分曲线，它们在开域上构成一个局部曲线坐标网，我们称这个曲线坐标为运动坐标，以区别于几何坐标。运动坐标与几何坐标不同，几何坐标由 R^m 中 m 个线性无关的向量张成，运动坐标由 $\mathfrak{g}(M)$ 上的一组线性无关的微分方程特征线的切矢量张成。为了使 3-4 得到满足，通常取几何坐标为单位正交的，而运动坐标则不一定是单位正交的。

定义 10-7：10-45 定义的变换为 $\mathfrak{g}(M)$ 上的坐标变换。

按照定义，物理量的值与所取坐标无关，因此坐标变换必然保持内积不变。

命题 10-8：半单纯流形的速度空间 $\mathfrak{g}(M)$ 上总有单位正交的运动标架。

证明：我们所说的正交，指的是内积定义 10-5 意义下的正交。设 ϑ^k span $\mathfrak{g}^*(M)$

$$\vartheta^k = a_j^k \mathrm{d}x^j \tag{10-47}$$

则 $$g(\vartheta^j, \vartheta^k) = G^{jk} \tag{10-48}$$

半单纯流形的 Cartan-Killing 度规的逆 G 是负定的，可以分解为

$$G = L^T L \tag{10-49}$$

或 $$G_{jk} = L_j^l \delta_{lm} L_k^m \tag{10-50}$$

其中 $L = [L_k^m]$ 是一个正定的常数上三角矩阵与虚数单位的乘积。做变换

$$\theta^k = L_m^k \vartheta^m = L_m^k a_n^m \bar{L}_l^n L_j^l \mathrm{d}x^j = b_l^k \mathrm{d}y^l \tag{10-51}$$

$$L^k_m a^m_n \bar{L}^n_l = b^k_l \tag{10-52}$$

$$L^l_j \mathrm{d}x^j = \mathrm{d}y^l \tag{10-53}$$

$$Y_k = \bar{L}^m_k X_m = \bar{L}^m_k \bar{a}^n_m L^l_n \bar{L}^j_l \frac{\partial}{\partial x^j} = \bar{b}^l_k \frac{\partial}{\partial y^l} \tag{10-54}$$

$$\bar{L}^m_k \bar{a}^n_m L^l_n = \bar{b}^l_k \tag{10-55}$$

$$\bar{L}^j_l \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial y^l} \tag{10-56}$$

在这个变换下，度规张量成为

$$C_2 = \delta^{jk} Y_j Y_k \tag{10-57}$$

$$C_2^* = \delta_{jk} \theta^j \theta^k \tag{10-58}$$

此时 θ^j 对应的度规矩阵变为单位矩阵 δ。内积变成为

$$g(\theta^j, \theta^k) = \delta^{jk} \tag{10-59}$$

这说明 10-51 的变换使运动坐标成为单位正交的。**证完。**

以上定义的运动坐标仍然是局部的。我们知道 Lie 群总有酋表示，酋表示把单位正交标架变为单位正交标架，而且运动标架的基底矢量是物理量，这意味着坐标曲线在不同开域之间是光滑衔接的。因此，无论是在单位元开域上研究流形的局部性质，或是在 P^m 上研究流形的整体性质，都有单位正交的运动标架。运动标架是整体的，而几何标架则通常是局部的。

设 ϑ^k 张成 Lie 代数 $\mathfrak{g}(M)$ 的对偶 $\mathfrak{g}^*(M)$，

$$\mathrm{d}\vartheta^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} \vartheta^i \wedge \vartheta^j \quad C^k_{ij} \in R \tag{10-60}$$

设有 θ^j 满足 10-51，注意到 L^j_k 是常数矩阵，所以

$$\mathrm{d}\theta^k = -\frac{1}{2} D^k_{ij} \theta^i \wedge \theta^j \quad D^k_{ij} = L^k_l C^l_{mn} \bar{L}^m_i \bar{L}^n_j \in R \tag{10-61}$$

可见 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上的坐标变换仍然得到 Maurer-Cartan 形式，只是对应的结构常数改变了。

设 $[A^i_j(\boldsymbol{x})]$ 是一个在开域 U 上非奇异的局部函数矩阵，

$$\eta^k = A_j^k\theta^j = 0 \tag{10-62}$$

与

$$\theta^k = 0 \tag{10-63}$$

的积分流形相同，因此二者等价。按照 Frobenius 可积性定理 η^k 满足

$$d\eta^j = \omega_n^j \wedge \eta^n \tag{10-64}$$

其中 ω_n^j 是 M 上 m^2 个 1 形式。

定义 10-9：由 10-62 所定义的变换为 $T^*(M)$ 上的坐标变换，f: $\theta^j \to \eta^j$。这个坐标变换同样应该保持内积不变。

从前面的讨论我们知道，当 ϑ^k 满足 10-60 时，对应的度规矩阵是 Cartan-Killing 度规；当基底变换为 θ^j 的时候，度规张量为 δ；当基底从 θ^j 变换为 $\eta^k = A_j^k\theta^j$ 的时候，得到的不再是 Maurer-Cartan 形式，而是 $T^*(M)$ 中的一组基底。在基底 η^k 下的度规矩阵变为

$$g^{jk} = \delta^{mn}\bar{A}_m^j\bar{A}_n^k \tag{10-65}$$

$$g_{jk} = \delta_{mn}A_j^m A_k^n$$

$$\bar{A}_m^j A_n^m = \delta_n^j \tag{10-66}$$

设

$$X_j = a_j^k \frac{\partial}{\partial x^k} \qquad \text{span } \mathfrak{g}(M) \tag{10-67}$$

在坐标变换下

$$[A]_j^k a_k^l \frac{\partial}{\partial x^l} = [A]_j^k a_k^l \frac{\partial y^n}{\partial x^l}\frac{\partial}{\partial y^n} \tag{10-68}$$

$$= [A]_j^k a_k^l [A^{-1}]_l^m [A]_m^r \frac{\partial y^n}{\partial x^r}[A^{-1}]_n^s [A]_s^t \frac{\partial}{\partial y^t} = a'^m_j \frac{\partial y'^s}{\partial x'^m}\frac{\partial}{\partial y'^s}$$

其中

$$[A]_j^k a_k^l [A^{-1}]_l^m = a'^m_j \tag{10-69}$$

$$[A]_s^t \frac{\partial}{\partial y^t} = \frac{\partial}{\partial y'^s} \tag{10-70}$$

$$[A]_m^r \frac{\partial y^n}{\partial x^r}[A^{-1}]_n^s = \frac{\partial y'^s}{\partial x'^m} \tag{10-71}$$

从 10-70 可以看出，对运动坐标的变换可以穿透基底矩阵作用在几何坐标上，此时，基底矩阵的特征值，行列式值都是不变量，是坐标

变换的拓扑不变量。在坐标变换 $A:\{x^k\}\to\{x'^k\}$ 下，如果把$\frac{\partial y^n}{\partial x^r}$看作映射 $F:M\to N$ 的 Jacobi 矩阵，则 Jacobi 矩阵的特征值，行列式值都是不变量，是映射的拓扑不变量。如果把$\frac{\partial y^n}{\partial x^r}$看作 G 的表示$[u_*]$，则 10-71 说明 G 在不同坐标下的结构群表示是等价的。在单位正交标架下，比较方便的是取$[A^i_j(x)]$为酉矩阵，因为这样的坐标变换使度规矩阵保持为 δ 不变。从全微分对偶可以定义坐标变换在 $T^*(M)$ 上的作用，

$$<X,\omega>=<AX,A^{-1}\omega> \tag{10-72}$$

显然，从上式定义的 $T^*(M)$ 上的坐标变换是 $T(M)$ 上的坐标变换的转置逆矩阵。

适当选取$[A^i_j(x)]$，可以从 Descartes 坐标得到一些常用的正交几何坐标，在三维空间中有球坐标、柱坐标、椭球坐标等等，这些坐标的 Lame 系数是已知的，例如，球坐标的 Lame 系数为

$$h_1=1\qquad h_2=r\qquad h_3=r\sin\theta \tag{10-73}$$

众所周知，在正交标架下 Laplace 算子可以分离变量，这给我们求解物理问题带来极大的便利。

最后还要指出的是，如果流形可积，则坐标变换也必须可积，不可积的坐标变换是无法作用在流形函数上的。即便流形是不可积的，如果要求对运动坐标的变换可以穿透基底矩阵作用在几何坐标上，则坐标变换也必须是可积的。在可积的情况下，$[A^i_j(x)]$必然是某个变换

$$y^j=f^j(x^1,x^2,\cdots,x^m)\qquad j=1,2,\cdots,m \tag{10-74}$$

的 Jacobi 矩阵。这时

$$\mathrm{d}y^j=\frac{\partial f^j}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{10-75}$$

第十一章　Δ算子的特征值及其特征形式

我们首先抄录重要的 Hodge 分解定理，对这个定理的证明感性趣的读者可以参见文献[18]。

定理 11-1(Hodge)：设 M^m 是一个可定向的紧致 Riemann 流形。对于每一个整数 $p, 0 \leqslant p \leqslant m$，$p$ 调和形式空间 $H^p_{\mathrm{harm}}(M)$ 都是有限维的，并且 p 微分形式空间 $F^p(M)$ 有如下正交直和分解：

$$F^p(M) = \mathrm{d}F^{p-1}(M) \oplus \delta F^{p+1}(M) \oplus H^p_{\mathrm{harm}}(M) \tag{11-1}$$

也就是说，若 $\eta \in F^p(M)$ 是 M 上的一个 p 形式，则存在一个 $p-1$ 形式 $\alpha \in F^{p-1}(M)$，一个 $p+1$ 形式 $\beta \in F^{p+1}(M)$ 和一个调和 p 形式 $\gamma \in H^p_{\mathrm{harm}}(M)$，使

$$\eta = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma \tag{11-2}$$

并且 $\mathrm{d}\alpha, \delta\beta, \gamma$ 是唯一的。

注意到算子Δ与 * 可交换，如果 γ 是调和形式，$*\gamma$ 也是调和形式。按照 Hodge 分解定理

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma_1 + *\gamma_2 = \omega_1 + *\omega_2 \tag{11-3}$$

$$\omega_1 = \mathrm{d}\alpha + \gamma_1 \quad \omega_2 = \mathrm{d}*\beta + \gamma_2 \tag{11-4}$$

其中 γ_1 是 p 调和形式，γ_2 是 $m-p$ 调和形式。显然，ω_1 与 γ_1 上同调，ω_2 与 γ_2 上同调。所有的 ω_1 构成 de Rham 上同调群 H^p，所有的 ω_2 构成 de Rham 余上同调群 H^{m-p}，Hodge 分解定理可以写成：

$$F^p(M) = H^p(M) \oplus *H^{m-p}(M) \tag{11-5}$$

命题 11-2：

$$H^p(M) \perp *H^{m-p}(M) \tag{11-6}$$

证明：从 Hodge 分解定理我们知道 $\mathrm{d}F^{p-1} \perp \delta F^{p+1}$，我们还知道每一个 de Rham 上同调类有唯一的调和代表，这样 γ_2 不会与 $\mathrm{d}\alpha$ 上同

调，γ_1 不会与 $d * \beta$ 上同调，因此 11-6 成立。**证完。**

Laplace-Beltrami 算子 $\Delta = d\delta + \delta d$ 是正定的，自伴的[20]。Δ 还具有性质，

命题 11-3：

$$\Delta: dF^{p-1}(M) \to dF^{p-1}(M) \tag{11-7}$$

$$\Delta: \delta F^{p+1}(M) \to \delta F^{p+1}(M) \tag{11-8}$$

证明：若

$$\theta = d\theta_1 \in dF^{p-l} \tag{11-9}$$

则有

$$\Delta\theta = \Delta d\theta_1 = d\Delta\theta_1 = d\alpha \in dF^{p-1} \tag{11-10}$$

反之，若

$$\Delta\theta = \theta_1 = d\alpha \in dF^{p-1} \tag{11-11}$$

则

$$\alpha = d\alpha_1 + \delta\beta_1 + \gamma_1 \tag{11-12}$$

注意到

$$d(d\alpha_1 + \gamma_1) = 0 \tag{11-13}$$

我们有

$$d\alpha = d\delta\beta_1 \tag{11-14}$$

$$\beta_1 = d\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2 \tag{11-15}$$

故

$$\delta\beta_1 = \delta d\alpha_2 \tag{11-16}$$

从而

$$\Delta\theta = d\alpha = d\delta d\alpha_2 = \Delta d\alpha_2 \tag{11-17}$$

故

$$\theta = d\alpha_2 \in dF^{p-1} \tag{11-18}$$

类似地可以证明 11-8，若

$$\psi = \delta\psi_1 \in \delta F^{p+1} \tag{11-19}$$

则有

$$\Delta\psi = \Delta\delta\psi_1 = \delta\Delta\psi_1 = \delta\beta \in \delta F^{p+1} \tag{11-20}$$

反之，若

$$\Delta\psi = \delta\beta \in \delta F^{p+1} \tag{11-21}$$

则
$$\beta = d\alpha_1 + \delta\beta_1 + \gamma_1 \tag{11-22}$$
注意到
$$\delta(\delta\beta_1 + \gamma_1) = 0 \tag{11-23}$$
我们有
$$\delta\beta = \delta d\alpha_1 \tag{11-24}$$
$$\alpha_1 = d\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2 \tag{11-25}$$
故
$$d\alpha_1 = d\delta\beta_2 \tag{11-26}$$
从而
$$\Delta\psi = \delta\beta = \delta d\delta\beta_2 = \Delta\delta\beta_2 \tag{11-27}$$
故
$$\psi = \delta\beta_2 \in \delta F^{p+1} \quad \text{证完。} \tag{11-28}$$

Δ算子的特征 p 形式 Φ^j 满足
$$\Delta\Phi^j = \lambda\Phi^j \tag{11-29}$$
λ 和 Φ^j 具有极其重要的性质[7]:

1. λ 全是非负数。
2. 对应于不同特征值 λ_1, λ_2 的特征子空间相互正交，
   即若，
   $$\Delta\Phi^i = \lambda_i\Phi^i \quad \Delta\Phi^j = \lambda_j\Phi^j \tag{11-30}$$
   则
   $$\int_M \Phi^i \wedge *\Phi^j = \delta^{ij} \tag{11-31}$$
3. 对应于每个特征值的特征子空间是有限维的。
4. 在实数空间 R 内，全体特征值所成的集合是 R 的离散子集。
5. 存在无穷多个不同的非零特征值。

命题 11-4:Δ的特征 p 形式是物理量。

证明:我们有
$$[u^*, \Delta] = 0 \tag{11-32}$$
λ 是常数，

$$[u^*, \lambda] = 0 \tag{11-33}$$

所以

$$u^* \Delta\Phi = \Delta(u^* \Phi) = \lambda(u^* \Phi) \tag{11-34}$$

证完。

必须指出，我们所证明的是 Φ 在群表示变换下的性质，Φ 一般并不与已知流形的局部微分方程等价，所以，虽然 Φ 是物理量，但是我们并不知道 Φ 是哪一个流形上的物理量。

由 Δ 算子的上述性质 2 和 3，我们可以把一个用 p 形式 η 表示的物理定律展开为 $\{\Phi^j\}$ 的级数：

$$\eta = \sum_j A_j \Phi^j \quad A_j \in R \tag{11-35}$$

其中

$$A_j = \int_M \eta \wedge * \Phi^j \tag{11-36}$$

考虑到特征形式的性质 5，这个展开需要收敛性证明。

定理[20] **11-5**：紧的 Riemann 流形上的每一个上同调类都含有唯一的调和代表。

证明：设 $h: F^p(M) \to H^p_{\text{harm}}(M)$ 是到调和形式的投影映射。若 ω 是闭的，则

$$\omega = h(\omega) + \mathrm{d}\alpha \quad \alpha \in F^{p-1}(M) \tag{11-37}$$

事实上，对每个闭形式，Hodge 分解定理都给出了

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma \in F^p(M) \tag{11-38}$$

它满足

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{dd}\alpha + \mathrm{d}\delta\beta + \mathrm{d}\gamma = 0 \tag{11-39}$$

因而有

$$\mathrm{d}\delta\beta = 0 \tag{11-40}$$

且

$$0 = \langle \mathrm{d}\delta\beta, \beta \rangle = \langle \delta\beta, \delta\beta \rangle \tag{11-41}$$

由此推出 $\delta\beta = 0$，ω 可以写成

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \gamma \tag{11-42}$$

这说明 ω 是与 γ 上同调的，如果 ω 与两个调和形式 γ_1 和 γ_2 上同调，则

$$\omega = d\alpha_1 + \gamma_1 \tag{11-43}$$

$$\omega = d\alpha_2 + \gamma_2 \tag{11-44}$$

两式相减得

$$0 = d(\alpha_1 - \alpha_2) + (\gamma_1 - \gamma_2) = d\alpha + (\gamma_1 - \gamma_2) \tag{11-45}$$

但是由于 $H^p_{harm}(M)$ 与 $dF^{p-1}(M)$ 垂直，如果 $d\alpha = \gamma_2 - \gamma_1$，则必有 $d\alpha = 0$，所以

$$\gamma_1 = \gamma_2 \tag{11-46}$$

证完。

定理[20] 11-6：紧定向流形的 de Rham 上同调群 H^p 都是有限维的。

证明：Hodge 分解定理保证了调和 p 形式空间 $H^p_{harm}(M)$ 对于 $0 \leqslant p \leqslant m$ 都是有限维的，再根据定理 11-5 就得到定理 11-6。**证完。**

定理[8] 11-7：H^p 与 H^{m-p} 有相同的 Betti 数。

命题 11-8：设 η 是可定向的紧致流形 M^m 上的 p 形式，则 η 是有限维空间中的元素。

证明：

$$\eta = d\alpha + \delta\beta + \gamma = \zeta + \xi + \gamma \tag{11-47}$$

其中 γ 是 M^m 上 p 阶调和形式空间 H^p_{harm} 中的元素。Hodge 分解定理告诉我们 H^p_{harm} 是有限维的，定理 11-6 告诉我们 H^p 是有限维的。我们知道 H^p 与 H^{m-p} 有相同的 Betti 数[8]，于是从 11-5 式可以看出命题成立。**证完。**

既然 η 是一个有限维空间中的元素，展开式 11-35 中只能有有限个不为零的系数 A_j，成为有限加和，无需收敛性证明。

定义 11-9：与 Δ 算子相关的两个算子：

$$\Delta_d = d\delta \tag{11-48}$$

$$\Delta_\delta = \delta d \tag{11-49}$$

显然

$$\Delta = \Delta_d + \Delta_\delta \tag{11-50}$$

$$* \Delta_d = \Delta_\delta * \tag{11-51}$$

$$* \Delta_\delta = \Delta_d * \tag{11-52}$$

命题11-10：若有特征值$\lambda > 0$对应的特征p形式Φ满足11-29，则必有$p-1$形式α使

$$\Delta_\delta \alpha = \lambda \alpha \tag{11-53}$$

证明：$\lambda > 0$，Φ可以作Hodge分解

$$\Phi = d\alpha + \delta\beta \tag{11-54}$$

用$d\alpha$与11-29两端作Poincaré标量积，11-29的左边为

$$\begin{aligned} < \Delta\Phi, d\alpha > &= < (d\delta + \delta d)(d\alpha + \delta\beta), d\alpha > \\ &= < \delta(d\alpha + \delta\beta), \delta d\alpha > = < \delta d\alpha, \delta d\alpha > \end{aligned} \tag{11-55}$$

右边为

$$< \lambda\Phi, d\alpha > = < \lambda(d\alpha + \delta\beta), d\alpha > = < \lambda\alpha, \delta d\alpha > \tag{11-56}$$

从11-55和11-56可以得到

$$< \Delta_\delta \alpha, \Delta_\delta \alpha > = < \lambda\alpha, \Delta_\delta \alpha > \Rightarrow \Delta_\delta \alpha = \lambda\alpha \tag{11-57}$$

证完。

命题11-11：若有特征值$\mu > 0$对应的特征p形式Φ满足11-29，则必有$p+1$形式β使

$$\Delta_d \beta = \lambda\beta \tag{11-58}$$

证明：$\mu > 0$，用$\delta\beta$与11-29两端作Poincaré标量积，11-29的左边为

$$\begin{aligned} < \Delta\Phi, \delta\beta > &= < (d\delta + \delta d)(d\alpha + \delta\beta), \delta\beta > \\ &= < d(d\alpha + \delta\beta), d\delta\beta > = < d\delta\beta, d\delta\beta > \end{aligned} \tag{11-59}$$

右边为

$$<\lambda\Phi,\delta\beta>=<\lambda(d\alpha+\delta\beta),\delta\beta>=<\lambda\beta,d\delta\beta> \quad (11\text{-}60)$$

从 11-59 和 11-60 可以得到

$$<\Delta_d\beta,\Delta_d\beta>=<\lambda\beta,\Delta_d\beta>\Rightarrow\Delta_d\beta=\lambda\beta \quad (11\text{-}61)$$

证完。

设 $\Phi,\Psi\in F^p(M)$，考虑特征值问题：

$$\Delta_d\Phi=\lambda\Phi \quad (11\text{-}62)$$

和

$$\Delta_\delta\Psi=\mu\Psi \quad (11\text{-}63)$$

命题 11-12：Δ_d 和 Δ_δ 的特征值大于 0 的特征形式一定是 Δ 的特征形式，反之 Δ 的特征值大于 0 的特征形式也一定可以分解为 Δ_d 和 Δ_δ 的特征形式之和。

证明：用 d 作用于 11-62，得

$$d\Phi=0 \quad (11\text{-}64)$$

用 δ 作用于 11-63 得

$$\delta\Psi=0 \quad (11\text{-}65)$$

所以有

$$\Delta_d\Phi=d\delta\Phi=\Delta\Phi=\lambda\Phi \quad (11\text{-}66)$$

和

$$\Delta_\delta\Psi=\delta d\Psi=\Delta\Psi=\mu\Psi \quad (11\text{-}67)$$

反之若有非零的 λ 使

$$\Delta\eta=\lambda\eta \quad (11\text{-}68)$$

可以把 η 分解为

$$\eta=d\alpha+\delta\beta \quad (11\text{-}69)$$

代入 11-68 得

$$\Delta(d\alpha+\delta\beta)=\lambda(d\alpha+\delta\beta) \quad (11\text{-}70)$$

两面用 $d\alpha$ 作 Poincaré 标量积，由于

$$<d\alpha,\Delta\delta\beta>=<\alpha,\delta\delta\Delta\beta>=0 \quad (11\text{-}71)$$

$$<d\alpha,\delta\beta>=<\alpha,\delta\delta\beta>=0 \quad (11\text{-}72)$$

可以消去式中的 $\delta\beta$

$$\langle \Delta d\alpha, d\alpha \rangle = \langle \lambda d\alpha, d\alpha \rangle \tag{11-73}$$

$$\Delta d\alpha = \lambda d\alpha \tag{11-74}$$

或

$$\Delta_d d\alpha = \lambda d\alpha \tag{11-75}$$

11-70 两面用 $\delta\beta$ 作 Poincaré 标量积消去 $d\alpha$ 还可以得

$$\Delta_\delta \delta\beta = \lambda \delta\beta \tag{11-76}$$

令 $\Phi = d\alpha$, $\Psi = \delta\beta$ 即得 11-62 和 11-63。**证完。**

推论 11-13:如果特征值大于 0,则 Δ_d 的特征形式是恰当的,Δ_δ 的特征形式是余恰当的。

从 11-75 和 11-76 直接可以得到这个推论。

如果 Φ 是 Δ 算子的特征形式,则凡是可以与 Δ 对易的线性不变算子作用于 Φ 都得到对应同一特征值的特征形式。这样的算子有 d、δ、Δ、* 和常数等。所以

命题 11-14:特征值为 λ 的特征形式是简并的。

命题 11-15:设

$$\Delta_d \Phi_1 = \lambda \Phi_1 \tag{11-77}$$

$$\Delta_d \Phi_2 = \mu \Phi_2 \tag{11-78}$$

$$\mu、\lambda > 0 \quad \Phi_1、\Phi_2 \in F^p$$

当且仅当

$$\mu = \lambda \tag{11-79}$$

的时候 Φ_1 与 Φ_2 上同调,即

$$\Phi \sim \Phi \tag{11-80}$$

证明:若 $\mu = \lambda$,用 11-77 减去 11-78 得

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\lambda} d\delta(\Phi_1 - \Phi_2) = d\alpha \tag{11-81}$$

其中

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}\delta(\Phi_1 - \Phi_2) \tag{11-82}$$

反之，若 $\Phi_1 \sim \Phi_2$，则

$$\Phi_1 - \Phi_2 = d\alpha \tag{11-83}$$

$$\Delta_d \Phi_1 - \Delta_d \Phi_2 = \lambda\Phi_1 - \mu\Phi_2 = \Delta_d d\alpha \tag{11-84}$$

$$\frac{\lambda}{\mu}\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{1}{\mu} d\Delta_\delta \alpha = d\alpha' \tag{11-85}$$

假如 $\lambda \neq \mu$ 则与 11-83 矛盾。**证完。**

命题 11-16：设

$$\Delta_\delta \Psi_1 = \lambda\Psi_1 \tag{11-86}$$

$$\Delta_\delta \Psi_2 = \mu\Psi_2 \tag{11-87}$$

$$\mu、\lambda > 0 \quad \Psi_1、\Psi_2 \in F^p$$

当且仅当

$$\mu = \lambda \tag{11-88}$$

有

$$*\Psi_1 \sim *\Psi_2 \tag{11-89}$$

证明：若 $\mu = \lambda$，用 11-86 减去 11-87 得

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{1}{\lambda}\delta d(\Psi_1 - \Psi_2) = \delta\beta \tag{11-90}$$

其中

$$\beta = \frac{1}{\lambda} d(\Psi_1 - \Psi_2) \tag{11-91}$$

反之，若 $*\Psi_1 \sim *\Psi_2$，则

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \delta\beta \tag{11-92}$$

$$\Delta_\delta \Psi_1 - \Delta_\delta \Psi_2 = \lambda\Psi_1 - \mu\Psi_2 = \Delta_\delta \delta\beta \tag{11-93}$$

$$\frac{\lambda}{\mu}\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{1}{\mu}\delta\Delta_d \beta = \delta\beta' \tag{11-94}$$

假如 $\lambda \neq \mu$ 则与 11-92 矛盾。**证完。**

推论 11-17：既然 $\Delta_d(\Delta_\delta)$ 的特征值 $\lambda > 0$ 对应的特征 p 形式是恰当(余恰当)的，那么 $\Delta_d(\Delta_\delta)$ 的特征值 $\lambda > 0$ 的特征 p 形式与其调和代表构成一个上同调(余上同调)类。如果若干个上同调类构成一

个封闭的线性空间 S，则 $S\subset H^p$ 是 de Rham 上同调群。

从命题 11-12 我们知道，如果特征值大于 0，Δ_d 和 Δ_δ 的特征 p 形式 Φ 和 Ψ 一定是 Δ 的特征 p 形式。反之，Δ 的特征 p 形式一定可以分解为 Δ_d 与 Δ_δ 的特征 p 形式 Φ 与 Ψ 之和。根据推论 11-17，每一个特征值对应的 Φ 或 Ψ 与它们的调和代表构成一个上同调类，一个 de Rham 上同调群是由若干个上同调类组成，从命题 11-2 可以知道绝不会有某个 Φ 或 Ψ 既是 H^p 的元素，又是 H^{m-p} 的元素，也就是说 Φ 和 Ψ 绝不会上同调，于是从命题 11-15 和 11-16 有，

推论 11-18：Δ_δ 和 Δ_d 不会有特征值相等的特征 p 形式。

也就是说，不存在一个 Δ 的特征值 $\lambda>0$，使得 λ 对应的特征 p 形式既是 Δ_d 的特征形式又是 Δ_δ 的特征形式。

从以上的讨论可以知道，Δ_δ 和 Δ_d 的特征值和特征 p 形式的集合就是 Δ 的特征值和特征 p 形式的集合。任何特征 p 形式要么属于 H^p 要么属于 $*H^{m-p}$，要么是 Δ_d 的特征 p 形式，要么是 Δ_δ 的特征 p 形式，二者只能居其一。分别求解 Δ_δ 和 Δ_d 的特征值和特征形式比直接求 Δ 的特征值和特征形式相对要容易些。

命题 11-19：

$$\Delta_d: H^p(M)\to H^p(M) \tag{11-95}$$

$$\Delta_\delta: H^{m-p}(M)\to H^{m-p}(M) \tag{11-96}$$

证明：设 H^p 由 Φ^j 张成（$\Delta_d\Phi^j=\lambda\Phi^j$），但是

$$\Delta_d\Delta_d\Phi^j=\lambda\Delta_d\Phi^j \tag{11-97}$$

$\Delta_d\Phi^j$ 是与 Φ^j 特征值相同的特征形式，所以 $\Delta_d\Phi^j$ 与 Φ^j 上同调，根据命题 11-16，$\Delta_d\Phi^j\in H^p$。

同理，设 H^{m-p} 由 Ψ^j 张成（$\Delta_\delta\Psi^j=\mu\Psi^j$），但是

$$\Delta_\delta\Delta_\delta\Psi^j=\lambda\Delta_\delta\Psi^j \tag{11-98}$$

$\Delta_\delta\Psi^j$ 是与 Ψ^j 特征值相同的特征形式，所以 $\Delta_\delta\Psi^j$ 与 Ψ^j 余上同调，$\Delta_\delta\Psi^j\in H^{m-p}$。**证完**。

流形上的微分形式都可以用 Δ 的特征形式展开，因而可以用 Δ_d 或 Δ_δ 的特征形式展开。有些流形，例如球面，的 Betti 数 B^p 可以直接从理论上得到[20]。对于某些 p 有 $B^p = 0$，这意味着对应的上同调群是空集，就不必费事求解了。由于 B^p 是拓扑不变量，凡是与球面微分同胚的流形都有相同的 B^p，我们知道在球面上有

$$B^p = \begin{cases} 1 & p = 0, m \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{11-99}$$

所以，对于与球面微分同胚的流形，若 p 不等于 0 或 m，也不必费事求解了。

第十二章　基本方程

在 $p-1$ 链 ∂C 上给定边界条件可以有两种不同的方式。设待求的微分形式是 η，在 ∂C 上直接给出 η 或 $*\eta$ 称为第一类边界条件，对应的定解问题叫做 Dirichlet 问题；在 ∂C 上给出 $\mathrm{d}\eta$ 或 $\delta\eta$ 称为第二类边界条件，对应的定解问题叫做 Neumann 问题。

如果是第一类边界条件，我们把 p 形式 η 作 Hodge 分解，

$$\eta = \mathrm{d}\alpha_1 + \delta\beta_1 + \gamma_1 \tag{12-1}$$

按照 Hodge 定理，这样的分解是唯一的。我们还可以继续分解下去，例如，对 α_1 再作 Hodge 分解，

$$\alpha_1 = \mathrm{d}\alpha_2 + \delta\beta_2 + \gamma_2 \tag{12-2}$$

考虑到

$$\mathrm{d}\alpha_1 = \mathrm{d}\delta\beta_2 \tag{12-3}$$

和

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha_2 + \gamma_2) = 0 \tag{12-4}$$

也就是说 $\mathrm{d}\alpha_2$ 和 γ_2 对求解 η 是无意义的，不失一般性，令 α_1 为余恰当形式

$$\alpha_1 = \delta\beta_2 \tag{12-5}$$

如果继续分解 β_2，

$$\beta_2 = \mathrm{d}\alpha_3 + \delta\beta_3 + \gamma_3 \tag{12-6}$$

可以发现 β_3 和 γ_3 对求解 η 是无意义的，令 β_2 为恰当形式

$$\beta_2 = \mathrm{d}\alpha_3 \tag{12-7}$$

这样的分解和讨论可以一直进行下去。在对 α_1 进行 $2m$ 次分解，对 β_1 进行 $2n$ 次分解之后，我们可以把 12-1 写成

$$\eta = \mathrm{d}(\Delta_\delta)^m\alpha + \delta(\Delta_d)^n\beta + \gamma \tag{12-8}$$

这里我们用 α 和 β 表示最后分解的结果。其中 m 和 n 是 0 或正整数，$m = n = 0$ 的特例正是 Hodge 分解。不失一般性，令

$$\alpha \in \delta F^p \qquad \beta \in \mathrm{d}F^p \tag{12-9}$$

显然，α 满足方程

$$\delta\alpha = 0 \tag{12-10}$$

$$\mathrm{d}\alpha = I' \tag{12-11}$$

β 满足方程：

$$\mathrm{d}\beta = 0 \tag{12-12}$$

$$\delta\beta = J' \tag{12-13}$$

γ 满足方程：

$$\delta\gamma = 0 \tag{12-14}$$

$$\mathrm{d}\gamma = 0 \tag{12-15}$$

它们等价于

$$(\Delta)^{m+1}\alpha = (\Delta_\delta)^{m+1}\alpha = I \tag{12-16}$$

$$(\Delta)^{n+1}\beta = (\Delta_d)^{n+1}\beta = J \tag{12-17}$$

$$\Delta\gamma = 0 \tag{12-18}$$

其中 $$I = \delta(\Delta_d)^m I', \qquad J = \mathrm{d}(\Delta_\delta)^n J' \tag{12-19}$$

当 $m = n = 0$ 时得到：

$$\Delta\alpha = \Delta_\delta\alpha = I \tag{12-20}$$

$$\Delta\beta = \Delta_d\beta = J \tag{12-21}$$

$$\Delta\gamma = 0 \tag{12-22}$$

方程 12-16 至 12-18 与第一类边界条件

$$\eta|_{\partial C} = \eta_0 \tag{12-23}$$

或 $$*\eta|_{\partial C} = *\eta_0 \tag{12-24}$$

一起构成 Dirichlet 问题。

如果求解 Neumann 问题，我们把 Hodge 分解写成

$$\begin{aligned}\eta &= \mathrm{d}(\Delta_\delta)^m\alpha + \delta(\Delta_d)^n\beta + \gamma \\ &= (\Delta_d)^m \mathrm{d}\alpha + (\Delta_\delta)^n\delta\beta + \gamma \\ &= (\Delta_d)^m\zeta + (\Delta_\delta)^n\xi + \gamma\end{aligned} \tag{12-25}$$

其中 $\zeta = \mathrm{d}\alpha, \xi = \delta\beta$，显然有

$$\mathrm{d}\zeta = 0 \quad \delta\zeta = K' \tag{12-26}$$

$$\delta\xi = 0 \quad \mathrm{d}\xi = L' \tag{12-27}$$

$$\mathrm{d}\gamma = 0 \quad \delta\gamma = 0 \tag{12-28}$$

它们等价于

$$(\Delta)^{m+1}\zeta = (\Delta_d)^{m+1}\zeta = K \tag{12-29}$$

$$(\Delta)^{n+1}\xi = (\Delta_\delta)^{n+1}\xi = L \tag{12-30}$$

$$\Delta\gamma = 0 \tag{12-31}$$

当 $m = n = 0$ 时得到：

$$\Delta\zeta = \Delta_d\zeta = K \tag{12-32}$$

$$\Delta\xi = \Delta_\delta\xi = L \tag{12-33}$$

$$\Delta\gamma = 0 \tag{12-34}$$

上述方程 12-29 至 12-31 与第二类边界条件

$$\mathrm{d}\eta|_{\partial C} = \mathrm{d}\eta_0 \tag{12-35}$$

或

$$\delta\eta|_{\partial C} = \delta\eta_0 \tag{12-36}$$

一起构成 Neumann 问题。

当 $m = n = 0, p = \dim(M)$ 时，Dirichlet 问题成为：

$$\Delta\beta = \Delta_d\beta = J \tag{12-37}$$

$$\eta|_{\partial\Omega} = \eta_0 \qquad \eta_0 \in F^{\dim(M)-1} \tag{12-38}$$

当 $m = n = 0, p = \dim(M)$ 时，Neumann 问题成为：

$$\Delta\zeta = \Delta_d\zeta = K \tag{12-39}$$

$$\mathrm{d}\eta|_{\partial\Omega} = \mathrm{d}\eta_0 \qquad \eta_0 \in F^{\dim(M)-2} \tag{12-40}$$

这两种特殊情况对于求解可积流形是最重要的。

通常我们遇到的物理问题都是已知某个 p 链上的边界条件，并不知道流形上的局部物理定律，这时基本方程就是流形上的局部物理定律。基本方程具有一个极其重要的性质，那就是线性性，由此，在本书一开始提到的层流和涡子的迭加就是二者的线性加和。基本方

程中的 α、β、ζ 和 ξ 要么是恰当的，要么是余恰当的，可见除了调和解以外，基本方程的解都是有势的，在第十五章中我们将利用边界条件反演得到与层流解对应的 α、β、ζ 和 ξ，所以层流解是有势的。此外，我们感性趣的仅仅是单位元开域上的局部微分方程，这样，基本方程的求解只在欧氏空间上进行。至此，我们已经达到了在本书一开始提出的把任何物理问题化为欧氏空间上的一组线性问题的目的。

从表面上看，我们似乎可以把边界条件作 Hodge 分解，然后与基本方程分别联立，得到三个定解问题，再分别求解。实际上作这样的分解一般是困难的，更重要的是我们不能假定 $\mathrm{d}F^{p-1}$ 类型的边界条件不会产生 δF^{p+1} 类型的解，反之亦然。

第十三章 Schrödinger 方程

现在我们要求出用于展开三维流形上0形式 Φ 的广义检测函数空间的函数基底。设这个基底是线性无关的函数序列 $\{\phi_{lmn}\}$，$\{\phi_{lmn}\}$ 总可以用 Schmidt 方法[9] 正交化。不失一般性，令 $\{\phi_{lmn}\}$ 是正交的，则 $\{\phi_{lmn}\}$ 张成一个无限维的线性函数空间 S。从任意两个基底之间的正交关系

$$(\phi_{lmn}, \phi_{ijk}) = \int_{R^3} \phi_{lmn}\phi_{ijk} \mathrm{d}v = C_{lmn}\delta_{li}\delta_{mj}\delta_{nk} \tag{13-1}$$

我们可以

定义 13-1：S 上的内积

$$(\phi_1, \phi_2) \in R \quad \phi_1, \phi_2 \in S \tag{13-2}$$

这样 S 就成为内积空间。

按照广义函数理论，对于任何一个 $\Phi \in H^0$，应该存在 S 中一组函数基底 $\{\phi_{lmn}\}$，使得

$$\Phi = \sum_{lmn} A_{lmn}\phi_{lmn} \quad A_{lmn} \in R \tag{13-3}$$

那么 ϕ_{lmn} 至少应该具有什么样的性质呢？

1. ϕ_{lmn} 应该至少是 C^r 的。按照广义函数的理论，ϕ_{lmn} 作为检测函数空间的基底，只有当其在 Φ 的定义域 Ω 上至少是 C^r 的，我们才能自由地对一个 C^r 流形上的物理量 Φ 作不多于 r 次微分运算。如果流形是 C^∞ 的，则 ϕ_{lmn} 也必须是 C^∞ 的。显然，C^∞ 的 ϕ_{lmn} 可以用作任何 C^r 流形的检测函数空间的基底，因此我们的主要兴趣在于 C^∞ 的 ϕ_{lmn}。
2. ϕ_{lmn} 必须是平方可积的。只有当 ϕ_{lmn} 是平方可积的时候，13-3 式的展开系数才可以用 13-1 式求出。

令 O 是一个线性微分算子，设 $\phi \in S$ spanned by ϕ_{lmn} 满足一个可以分离变量的线性微分方程。

$$O\phi = 0 \tag{13-4}$$

根据线性微分方程理论，13-4 的解构成线性函数空间。注意到基本方程组中的偏微分方程都含有线性算子 Δ^{m+1}，我们的想法是令

$$O = \Delta^{m+1} - U \tag{13-5}$$

或

$$\Delta^{m+1}\phi = U\phi \tag{13-6}$$

这样一来，如果求解过程中出现 $\Delta^{m+1}\phi$，则可以代换为 $U\phi$，使计算简化。称 13-6 为 Schrödinger 方程，U 为势。必须指出，尽管 13-6 被称作 Schrödinger 方程，它的推导过程和求解方法完全不同于量子力学中的 Schrödinger 方程，量子力学中的 Schrödinger 方程是 13-6 的特例。当 $m = 0$ 的时候，Φ 满足二阶线性的基本方程。由于 ϕ 与 Φ 之间仅相差一个常系数线性变换 13-3，因此 ϕ 也满足一个二阶线性微分方程，由此得到 U 是一个阶数小于等于 2 的微分算子，最常见的 U 是某个函数。在本书中我们主要考虑 $m = 0$ 的情况，所以

$$\Delta\phi = U\phi \tag{13-7}$$

13-7 在正交坐标 $\{x^k\}$ 下能够分解变量当且仅当[13]

$$\phi = \prod_{k=1}^{m} \phi(x^k) \tag{13-8}$$

$$U = \sum_{k=1}^{m} \frac{U(x^k)}{(h_k)^2} \tag{13-9}$$

其中 h_k 是正交坐标的 Lame 系数。如果使用球座标，13-7 可以写为[10]

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} = U\phi \tag{13-10}$$

令

$$\phi = \phi_l(\theta)\phi_m(\varphi)\phi_n(r) \tag{13-11}$$

$$U = \frac{1}{r^2} U(\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} U(\varphi) + U(r) \tag{13-12}$$

把 13-10 式分解变量以后，与 φ 有关的项为

$$\frac{\mathrm{d}^2 \phi_m}{\mathrm{d}\varphi^2} + [\kappa + U(\varphi)]\phi_m = 0 \tag{13-13}$$

当 $U(\varphi) = 0$ 时，13-13 有一个明显的解，

$$\phi_m = T_m(\cos\varphi) \tag{13-14}$$

式中 T_m 是 Tschebyscheff 多项式，$\kappa = m^2$。

把 13-10 分解变量以后，与 θ 有关的项为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\phi_l}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[\sigma - \frac{\kappa}{\sin^2\theta} + U(\theta)\right]\phi_l = 0 \tag{13-15}$$

当 $U(\theta) = 0$ 时，13-15 有一个明显的解，

$$\phi_l = P_l^m(\cos\theta) \tag{13-16}$$

式中 P_l^m 是缔合 Legendre 多项式，其中 $\kappa = m^2$，$\sigma = l(l+1)$。

把 13-10 分解变量以后，与 r 有关的径向方程是

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}r} + \left[U(r) - \frac{\sigma}{r^2}\right]\phi_n = 0 \tag{13-17}$$

当 $U(r) = 0$ 时，13-17 成为 Euler 方程，Euler 方程的解在圆点上是奇异的，不能作为检测函数基底，所以 $U(r)$ 不能为零。Schrödinger 方程的变量分解可以参见附录 IX。

在 13-13、13-15 和 13-17 中，适当地选取 U，可以使 ϕ 具有不同的性质，从而得到某个正交函数解，通常我们在量子力学中求解 Schrödinger 方程的时候采用的就是这种方法。反之，令 ϕ 为某个正交函数，也可以反解出 U 来，这是本书在求解 Schrödinger 方程的时候所采用的方法。对于不同的正交关系，反解出的 U 也是不一样的。基本求解过程是这样的：令 ϕ 与选定的正交多项式满足相同的正交关系，从而确定 ϕ 的函数形式。然后微分 ϕ 代入 13-13、13-15 和 13-17，

整理使得二阶、一阶导数项的系数分别与选定的正交多项式所满足的标准方程的对应系数相同，最后从0阶导数项的系数确定 U。这样确定的 U 是一个函数。

从方程奇点的个数及其奇点的性质可以判断哪一种正交多项式可以用于求解13-13、13-15和13-17，例如，径向方程在 $r=0$ 上是正则奇点，在 $r=\infty$ 上是非正则奇点。我们知道合流超几何函数有相同的奇点性质[12]，因此合流超几何函数的特例如 Laguerre 和 Hermite 多项式可以用于求解径向方程。θ 向方程在 $\theta=0$、π、$-\pi$ 上是正则奇点，因此超几何函数的特例如 Legendre、Gegenbauer 和 Tschebyscheff 多项式可以用于求解 θ 向方程。我们不必考虑采用超几何函数及其特例 Jacobi 多项式、Legendre 多项式或 Tschebyscheff 多项式等来求解径向方程，事实上这样的尝试也是不成功的。反之，θ 和 φ 向的方程也不必考虑采用合流超几何函数及其特例来求解。

首先求解径向方程13-17。第一个可以考虑的正交多项式是 Sonine-Laguerre 多项式[12]，具体求解过程见附录 Ⅰ。

$\beta=0$ 时，

$$x=(\mu r)^2 \tag{13-18}$$

$$U(r)=\frac{\mu^2}{4}\left[-x+2(2n+\alpha+1)+\frac{1}{x}\left(\sigma+\frac{1}{4}-\alpha^2\right)\right] \tag{13-19}$$

$$\phi_n=x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{2}}S_n^\alpha \tag{13-20}$$

S_n^α 是 Sonine – Laguerre 多项式。如果要求 ϕ_n 是解析的，则

$$\alpha-\frac{1}{2}=0,1,2\cdots \qquad \alpha=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\cdots \tag{13-21}$$

若

$$\sigma=\alpha^2-\frac{1}{4} \tag{13-22}$$

$$U(r)=\frac{\mu^2}{4}[2(2n+\alpha+1)-x] \tag{13-23}$$

$\beta = 1$ 时

$$x = \mu r \tag{13-24}$$

$$U(r) = \mu^2\{[\sigma - \frac{\alpha^2 - 1}{4}]x^{-2} + [n + \frac{\alpha + 1}{2}]x^{-1} - \frac{1}{4}\} \tag{13-25}$$

$$\phi_n = x^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha \tag{13-26}$$

L_n^α 是缔合 Laguerre 多项式。如果要求 ϕ_n 是解析的，则

$$\frac{\alpha - 1}{2} = 0, 1, 2, \cdots \quad \alpha = 1, 3, 5 \cdots \tag{13-27}$$

若
$$\sigma = l(l + 1) \qquad \alpha = 2l + 1 \tag{13-28}$$

$$U(r) = \mu^2[(2n + 1 + \alpha)\frac{1}{2x} - \frac{1}{4}] \tag{13-29}$$

我们称解 13-26 为气态的；称解 13-20 为液态的。称 μ 为尺度因子，μ 的值由物理问题的尺度决定。解 13-26 不是正交的，而是准正交的，可以用 Schmidt 方法使其正交归一化。

Schrödinger 方程还可以在直角坐标下分解变量，得到三个完全一样的方程

$$\frac{d^2\phi_n}{dx^2} + [U(x) - \varepsilon]\phi_n = 0 \tag{13-30}$$

$$\frac{d^2\phi_m}{dy^2} + [U(y) - \kappa]\phi_m = 0 \tag{13-31}$$

$$\frac{d^2\phi_l}{dz^2} + [U(z) - \sigma]\phi_l = 0 \tag{13-32}$$

及
$$\varepsilon + \kappa + \sigma = 0 \tag{13-33}$$

解得(附录 Ⅶ)

$$u = \mu x、\mu y、\mu z \tag{13-34}$$

若 $\alpha = 0$

$$\frac{U(u) + \varepsilon}{\mu^2} = -1 - 2n + u^2 \tag{13-35}$$

称
$$\phi_n = e^{-\frac{u^2}{2}} H_n \tag{13-36}$$
为固态的，μ 为尺度因子。注意到坐标 x、y、z 在上述求解过程中是完全对称的，三个分量方程得到的尺度因子必然是相等的。

我们可以仿照求解径向方程的方法用 Jacobi 多项式求解 θ 向方程和 φ 向方程，结果见附录 Ⅲ 和 Ⅴ。

以上在确定势 U 的过程中都是先令二阶导数项的系数与选定的正交多项式的标准方程相同，再从一阶导数项的系数确定一个变换，最后从零阶导数项的系数确定势 U，我们用(2,1,0)来表示这个求解顺序。其实还可以有其他的求解顺序，如，(1,2,0)，(0,1,2) 等等。(1,2,0) 的意思是先令一阶导数项的系数与选定的正交多项式的标准方程相同，再从二阶导数项的系数确定一个变换，最后从零阶导数项的系数确定势 U。可能的求解顺序一共有 $3! = 6$ 种，从而得到其他解态。这些解态对应的 U 可以是一个一阶导数或二阶导数。此外，在欧氏空间中，还可以在其他正交坐标系中分解 Schrödinger 方程，也能得到其他解态。按照文献[13]，在 R^3 中这样的正交坐标一共有 13 种，每一种正交坐标有三个分量方程，每一个分量方程可以尝试用任何解析且平方可积的正交函数求解，同样可以得到不同的解态。因此可能得到的解态是非常多的，限于篇幅，不再逐一求解。

最终，我们得到 Schrödinger 方程的气态解
$$\begin{aligned}\phi &= \phi_l \times \phi_m \times \phi_n \\ &= [(\mu r)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\mu r}{2}} L_n^{\alpha}(\mu r)] P_l^m(\cos\theta) \begin{vmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{13-37}$$
其中　$l = 0,1,2,\cdots \quad m = 0,1,2,\cdots,l$

$n = 1,2,3\cdots \quad \alpha = 1,3,5\cdots$

$U(\theta)$ 和 $U(\varphi)$ 等于 0，$U(r)$ 的表达式见 13-25。

还得到了 Schrödinger 方程的液态解
$$\phi = \phi_l \times \phi_m \times \phi_n$$

$$= [(\mu r)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\mu^2 r^2}{2}} S_n^{\alpha}(\mu^2 r^2)] P_l^m(\cos\theta) \begin{vmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{vmatrix} \tag{13-38}$$

其中 $l = 0,1,2,\cdots \quad m = 0,1,2,\cdots,l$

$n = 1,2,3\cdots \quad \alpha = \frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\cdots$

$U(\theta)$ 和 $U(\varphi)$ 等于 0, $U(r)$ 的表达式见 13-19。

如果在直角坐标下分解变量,引用固态解

$$\phi = \phi_l \times \phi_m \times \phi_n$$

$$= (\mu x)^{\alpha}(\mu y)^{\beta}(\mu z)^{\gamma} e^{-\mu^2 \frac{x^2+y^2+z^2}{2}} H_n^{\alpha}(\mu x) H_m^{\beta}(\mu y) H_l^{\gamma}(\mu z) \tag{13-39}$$

其中 $l = 0,1,2,\cdots \quad m = 0,1,2,\cdots \quad n = 0,1,2,\cdots$

$$\frac{U+\varepsilon+\kappa+\sigma}{\mu^2} = -2(\alpha+\beta+\gamma+n+m+l)-3 + \mu^2(x^2+y^2+z^2) + \frac{\vartheta_n+\alpha(\alpha-1)}{(\mu x)^2} + \frac{\vartheta_m+\beta(\beta-1)}{(\mu y)^2} + \frac{\vartheta_l+\gamma(\gamma-1)}{(\mu z)^2} \tag{13-40}$$

称 13-40 中的正幂次项为刚性因子,负幂次项为塑性因子。

第十四章　求解Δ算子的特征形式

我们首先考虑 Δ^{m+1} 算子的 0 阶特征方程, 令 $m = 0$

$$\Delta\Phi = \lambda\Phi \qquad \Phi \in H^0(M) \tag{14-1}$$

考察 Schrödinger 方程, 虽然 $[u^*, \Delta] = 0$, 但是一般地 $[u^*, U] \neq 0$, 所以 ϕ 不是物理量, Schrödinger 方程不是物理定律。从命题 11-4 知道 Φ 一定是物理量。$m = 3$ 时, 在球坐标下 14-1 可以写为 Helmholtz 方程

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right] = \lambda\Phi \tag{14-2}$$

令

$$\Phi = \Phi_k(r)\Phi_l(\theta)\Phi_m(\varphi) \tag{14-3}$$

解得[10]

$$\Phi_{klm} = \Phi_k \times \Phi_l \times \Phi_m = j_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{vmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{vmatrix} \tag{14-4}$$

其中

$$\Phi_k = j_l(kr) \qquad k = \sqrt{\lambda} \tag{14-5}$$

$$\Phi_l = P_l^m(\cos\theta) \tag{14-6}$$

$$\Phi_m = \begin{vmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{vmatrix} \tag{14-7}$$

其中 j_l 是球 Bessel 函数, $P_l^m(\cos\theta)$ 是缔合 Legendre 多项式。14-4 的 Φ_{klm} 张成一个无限维的 0 形式空间 H^0, Φ_k 在 $[0, \infty)$ 上不是平方可积的, 因此当物理问题定义在包含 ∞ 的区域上时不能用 Φ_{klm} 作 11-29 那样的展开。我们可以尝试用 Schrödinger 方程的特征解展开 Φ, 从而求出 14-1 的解, 并使之在 $[0, \infty)$ 上平方可积。为此, 用前一章求出

的 Schrödinger 方程的解 ϕ 来展开 Φ。

令
$$\Phi = \Phi_L(\theta)\Phi_M(\varphi)\Phi_N(r) \tag{14-8}$$

$$\Phi_L = \sum_{l=0}^{\infty} A_l\phi_l \quad \Phi_M = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\phi_m \quad \Phi_N = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\phi_n \tag{14-9}$$

则
$$\Phi = \Phi_L(\theta)\Phi_M(\varphi)\Phi_N(r) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_lA_mA_n\phi_l\phi_m\phi_n \tag{14-10}$$

代入 14-1 得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} A_lA_mA_n[U(r) - \lambda + \frac{U(\theta)}{r^2} + \frac{U(\varphi)}{r^2\sin^2\theta}]\phi_l\phi_m\phi_n = 0 \tag{14-11}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_lA_m\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n[U(r) - \lambda]\phi_n\right\}\phi_l\phi_m \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_nA_m\frac{1}{r^2}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} A_lU(\theta)\phi_l\right\}\phi_m\phi_n \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_lA_m\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} A_mU(\varphi)\phi_m\right\}\phi_l\phi_n = 0\end{aligned} \tag{14-12}$$

上式成立当且仅当

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_lU(\theta)\phi_l = 0 \tag{14-13}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_mU(\varphi)\phi_m = 0 \tag{14-14}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n[U(r) - \lambda]\phi_n = 0 \tag{14-15}$$

命题 14-1:展开式 14-13、14-14 和 14-15 必然存在只有有限个系数不为零的解。

证明:从 Hodge 分解定理可以证明,紧致、可定向流形上的 0 形式 η 是有限维空间中的元素(命题 11-8),而这样的流形上的任何 0 形式可以展开为 Δ 算子特征函数 Φ 的级数,因此 Φ 也必然是有限维

空间的元素，进而 Φ_L、Φ_M 和 Φ_N 也是有限维空间中的元素，事实上，从第十一章里叙述的调和算子的性质 3 也可以直接证明这个命题。**证完。**

在附录 Ⅱ、Ⅳ 和 Ⅵ 中我们求出了有限维的 Φ_N、Φ_L 和 Φ_M，最后得到三组代数方程

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2-1}{4}=\sigma \\ A_N(\alpha,\sigma,\rho)=0 \\ A_{N+1}(\alpha,\sigma,\rho)=0 \end{cases} \tag{14-16}$$

$$\begin{cases} A_L(\beta,\sigma,\kappa)=0 \\ A_{L+2}(\beta,\sigma,\kappa)=0 \end{cases} \tag{14-17}$$

$$\begin{cases} A_M(\chi,\kappa)=0 \\ A_{M+2}(\chi,\kappa)=0 \end{cases} \tag{14-18}$$

联立这三组七个方程，我们只有六个参数，而且其中有些量子数只能取正整数或正半整数，可是注意到我们还有三个可以取任意正整数的数 N、L 和 M，问题成为七个约束，九个可以独立变化的参数，解是可能存在的。事实上，命题 14-1 保证了上述联立方程必然有解。

在以上的求解过程中我们假定 $U(\theta)$ 和 $U(\varphi)$ 均不为0。可以想见，由于 θ 或 φ 方向的势出现在方程中，这样的解将具有明显的旋涡结构。如果取 $U(\varphi)=0$，则 14-18 的两个方程消去，且

$$\chi=\upsilon=\pm\frac{1}{2} \qquad \kappa=m^2 \tag{14-19}$$

$$\Phi_M=\phi_m \tag{14-20}$$

14-16 至 14-18 成为

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2-1}{4}=\sigma \\ A_N(\alpha,\sigma,\rho)=0 \\ A_{N+1}(\alpha,\sigma,\rho)=0 \end{cases} \tag{14-21}$$

$$\begin{cases} A_L(\beta, \sigma, m^2) = 0 \\ A_{L+2}(\beta, \sigma, m^2) = 0 \end{cases} \tag{14-22}$$

如果取 $U(\theta) = 0$, 则 14-17 的两个方程消去, 且

$$l = n - m, \ \sigma = n(n+1) \tag{14-23}$$

$$\Phi_L = \phi_n \tag{14-24}$$

按照惯例, 我们用 l 表示缔合 Legendre 多项式的下标, 把 14-24 写成

$$\Phi_L = \phi_l \tag{14-25}$$

14-16 至 14-18 成为

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2 - 1}{4} = l(l+1) \\ A_N(\alpha, l(l+1), \rho) = 0 \\ A_{N+1}(\alpha, l(l+1), \rho) = 0 \end{cases} \tag{14-26}$$

14-26 是三个约束, 四个可以独立变化的参数的问题, 命题 14-1 保证 14-26 必然有解。

$U(r)$ 是不能为 0 的, 否则 Schrödinger 方程的径向分量方程就成为有奇性的 Euler 方程。取 $U(\theta) = U(\varphi) = 0$, $U(r) \neq 0$ 的气态解, 最后得到

$$\Phi_{lmN} = \phi_l \phi_m \Phi_N = \phi_l \phi_m \sum_{n=0}^{N-1} A_n \phi_n \tag{14-27}$$

这里　$0 \leqslant l \leqslant \dfrac{N-1}{2}$,　$\alpha = 2l + 1$　$m = 0, 1, 2, \cdots, l$

为了方便后面的叙述, 我们将把 14-1 的解简单表示为 Φ^j。在附录 Ⅱ、Ⅳ 和 Ⅵ 中递推求出的解带有任意常数 A_0 和 A_1, 我们可以利用这些任意常数使求出的特征解归一化。在以下的讨论中我们假定求出的 Φ^j 已经正交归一化了, 也就是说 Φ^j 满足

$$\int_{R^m} \Phi^k \wedge * \Phi^j = \delta^{kj} \tag{14-28}$$

求出 Δ 算子的特征 0 形式以后, 就可以用第十五章的方法反演出 M

上的流形函数Φ。用不变算子 * 、d 作用于 Φ 可以得到M 上的其他物理量。例如，$*\Phi$ 是 m 形式；$\mathrm{d}\Phi$ 是 1 形式。还可以用第七章的方法生成 X_k span $\mathfrak{g}(M)$ 和 ϑ^j span $\mathfrak{g}^*(M)$。M 上的任意 1 形式可以写成 ϑ^j 的常系数线性组合，任意 p 形式可以写成 ϑ^j 的 p 阶张量积的常系数线性组合，

$$\Phi^p = \sum A_{j_1 \cdots j_p} \vartheta^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vartheta^{j_p} \qquad A_{k_1 \cdots k_p} \in R \tag{14-29}$$

运用第五章叙述的各种运算可以得到可积流形 M 上的各种张量。Φ_{lmN} 是物理量，但不一定是 M 上的物理量。按照我们在第十九章给出的定义，已知任何 1 形式 $\mathrm{d}\Phi_{lmN}$，可以计算出对应的能量

$$\epsilon_{lmN} = \int_M \mathrm{d}\Phi_{lmN} \wedge *\mathrm{d}\Phi_{lmN} = \int_{P^m} \mathrm{d}\Phi_{lmN} \wedge *\mathrm{d}\Phi_{lmN} \tag{14-30}$$

给定不同的量子数，我们称能量序列$\{\epsilon_{lmN}\}$为量子的原始能级。

以上我们从特征方程 14-1 求出了特征 0 形式及其对应的特征值，由此可以求出可积流形上的任何张量。在 $p(p>0)$ 阶可积流形上，p 形式η是不可积的，只能用Δ算子的 p 阶特征形式展开，因此必须求解 Δ 算子的 $p(p>0)$ 阶特征方程。

$$\Delta_d \Phi^p = \mu \Phi^p \quad \Phi^p \in F^p(M) \tag{14-31}$$

设 $\vartheta^{k_1 \cdots k_p}$ 张成p 阶可积流形M 上的p 阶 de Rham 上同调形式空间 $H^p(M)$，$H^p(M)$ 上的任意 p 形式可以写作

$$\Phi^p = \sum A_{k_1 \cdots k_p} \vartheta^{k_1 \cdots k_p} \quad A_{k_1 \cdots k_p} \in R \tag{14-32}$$

注意到算子Δ_d的性质，$\Delta_d : H^p(M) \to H^p(M)$，$\Delta_d \vartheta^{k_1 \cdots k_p}$ 也是$H^p(M)$中的元素，可以写成 $\vartheta^{k_1 \cdots k_p}$ 的常系数线性组合

令

$$\Delta_d \vartheta^{k_1 \cdots k_p} = T^{k_1 \cdots k_p}_{j_1 \cdots j_p} \vartheta^{j_1 \cdots j_p} \qquad T^{k_1 \cdots k_p}_{j_1 \cdots j_p} \in R \tag{14-33}$$

故 14-26 式可以写成

$$(A_{k_1 \cdots k_p} T^{k_1 \cdots k_p}_{j_1 \cdots j_p} - \mu A_{j_1 \cdots j_p}) \vartheta^{j_1 \cdots j_p} = 0 \tag{14-34}$$

注意到 $\vartheta^{k_1 \cdots k_p}$ 是线性无关的基底，

$$(T^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}-\mu\delta^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p})A_{k_1\cdots k_p}=0 \tag{14-35}$$

写成矩阵形式

$$(T-\mu I)\boldsymbol{A}=0 \tag{14-36}$$

其中 $T=[T^{k_1\cdots k_p}_{j_1\cdots j_p}]$，$\boldsymbol{A}=\{A_{k_1\cdots k_p}\}$，$I$ 是单位矩阵。根据 Hodge 分解定理，如果流形是紧致、可定向的，$\boldsymbol{A}$ 是有限维矢量，14-31 式存在非零解 $\boldsymbol{A}$ 的充分必要条件是：

$$\det(T-\mu I)=0 \tag{14-37}$$

从此式可以求出特征值 μ，进而求出 μ 对应的特征形式 Φ^p。对 Δ_δ 算子也可以进行类似的讨论进而得出对应的公式。这样的讨论仅仅从理论上证明 14-26 是可解的，具体的求解方法仍然未知。在这里我们讨论一个特殊情况，那就是在 Descartes 坐标系下，由于度规矩阵是单位矩阵，当 $*$ 算子作用于微分 p 形式 Φ^p 的时候，不会把 Φ^p 的分量混在一起，得到的方程组关于每个分量是一个独立的标量微分方程，可以分别独立地解出。

在求解 Δ 算子的特征解的时候可以采用不同态的 Schrödinger 方程特征解，而且我们可以用 Δ'' 来代替 Schrödinger 方程中的 Δ，也可以用 Δ'' 的特征形式来展开物理量。同一个物理量可以用 Δ'' 算子不同的特征解展开，得到不同的表示方式。

定义 14-2：流形上的一个物理量可以用 Schrödinger 方程的不同特征解表示，我们称这些不同的表示为物理量的态。

假设存在一个微分同胚映射 $F:P_1\to P_2$，P_1 和 P_2 是不同态的 Δ 算子特征空间，由于 F 是微分同胚，所以 F 把 P_1 中的一个 N 维子空间映射为 P_2 中的一个 N 维子空间，N 是在同胚映射下的拓扑不变量。

定义 14-3：Δ 算子的特征形式从一个态到另一个态的转变为相变，称 $F:P_1\to P_2$ 为相变映射。

第十五章　p 链上的边界条件反演

在本章中我们将从边界条件反演得到物理问题的解，这个解被表示为Δ算子的特征 p 形式Φ^j 的线性加和。从第十四章的讨论我们知道 Φ^j 可以有很多不同的态，因此首先要确定使用那一个态的 Φ^j。如果物理问题依赖于某种具有确定性质的背景物质（我们称之为以太），那么这个问题不难回答：采用的 Φ^j 的态应该与以太具有相同的势。例如：液体中发生的物理问题要用液态的 Φ^j，气体中发生的物理问题要用气态的 Φ^j。

一个物理问题的边界条件是这样给定的：设流形 M 上有 p 链 C，在 ∂C 上给定 $p-1$ 形式 ω，ω 的给定可以有四种不同的情况，它们分别是：

第一类边界条件或 Dirichlet 问题

$$\omega|_{\partial C} = *\eta_0 \tag{15-1}$$

$$\omega|_{\partial C} = \eta_0 \tag{15-2}$$

第二类边界条件或 Neumann 问题

$$\omega|_{\partial C} = \delta\eta_0 \tag{15-3}$$

$$\omega|_{\partial C} = *\mathrm{d}\eta_0 \tag{15-4}$$

15-1 至 15-4 中的四个 η_0 是不同阶的微分形式，在以后的叙述中我们不再指出这一点。能够把 ∂C 和 C 上的微分形式联系在一起的是链上的 Stokes 公式

$$\int_C \mathrm{d}\omega = \int_{\partial C}\omega \tag{15-5}$$

命题 15-1：C 上的调和形式与 ∂C 上的边界条件无关。

证明：把

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma \tag{15-6}$$

代入 15-5，注意到 $d\gamma = 0$，显然可以把任意调和形式 γ 代入 15-5 的左端而使等式成立。证完。

15-5 可以写成 de Rham 对偶的形式

$$< C, d\omega > = < \partial C, \omega > \tag{15-7}$$

上式的左端是在 p 链上的积分，右端是在 $p-1$ 链上的积分。从 de Rham 定理我们知道存在非退化的 de Rham 对偶[20]

$$< H_p, H^p > \text{和} < H_{m-p}, H^{m-p} > \tag{15-8}$$

其中 H_p 就是同调群，H_{m-p} 是余同调群，可以把 H_{m-p} 理解为纯粹是 H^{m-p} 的对偶。我们知道 H^p 和 H^{m-p} 之间存在着非退化的 Poincaré 对偶

$$< \omega, \eta > = \int_M \omega \wedge * \eta \to R \tag{15-9}$$

$\eta, \omega \in H^p$)

两个空间之间存在非退化的对偶意味着这两个空间之间存在同胚映射，因此我们有交换图

$$\begin{array}{ccc} H^p(M) & \Leftrightarrow & H^{m-p}(M) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ H_p(M) & \Leftrightarrow & H_{m-p}(M) \end{array} \tag{15-10}$$

15-10 中任意两个空间之间存在非退化的的对偶，它们之间的映射都是同胚映射。如果把所有的 p 链构成的线性空间表示为 $C_p(M)$，显然有 11-5 的对偶

$$C_p(M) = H_p(M) \oplus * H_{m-p}(M) \tag{15-11}$$

而且

$$H_p(M) \perp * H_{m-p}(M) \tag{15-12}$$

在 H^p 中可以取适当的 Δ 算子的特征形式 Φ^j 为基底，使得

$$\Phi^j \text{ span } H^p \tag{15-13}$$

由于 15-10 中的两两空间之间存在同胚映射，于是有

$$* \Phi^j \text{ span } * H^{m-p} \tag{15-14}$$

$$C_k \text{ span } H_p \tag{15-15}$$

和
$$* C_k \text{ span } * H_{m-p} \tag{15-16}$$

在这里我们并未定义作用在 p 链上的 $*$ 算子，只是用 $*C_k$ 表示 H_{m-p} 的基底而已。适当选取 H^p 和 H_p 的基底可以使得 Poincaré 对偶和 de Rham 对偶满足

$$<\Phi^k, \Phi^j> = \int_M \Phi^k \wedge * \Phi^j = \delta^{jk} \tag{15-17}$$

和
$$<C_k, \Phi^j> = \delta_k^j \tag{15-18}$$

任给闭 p 链 $C \in H_p$，我们有展开式

$$C = \sum_k b^k C_k \qquad b^k \in R \tag{15-19}$$

用 Φ^j 与 15-19 两端作 de Rham 对偶可以求出系数 b^k，

$$b^j = <C, \Phi^j> \tag{15-20}$$

同样，任给闭 p 形式 $\eta \in H^p$，我们有展开式

$$\eta = \sum_j a_j \Phi^j \quad a_j \in R \tag{15-21}$$

用 C_k 与 15-21 两端作 de Rham 对偶可以求出系数 a_j，

$$a_k = <C_k, \eta> \tag{15-22}$$

类似地有

$$* C = \sum_k b^k * C_k \quad b^k \in R \tag{15-23}$$

用 $*\Phi^j$ 与之作 de Rham 对偶可以求出系数 b^k。有趣的是，15-21 还可以用 Poincaré 对偶求出系数 a_k，

$$a_k = <\Phi^k, \eta> \tag{15-24}$$

如果 Φ^j 和 C_k 满足 15-17 和 15-18，15-22 和 15-24 求出的系数是完全一样的。显然，用 Poincaré 对偶求系数比用 de Rham 对偶求系数容易得多。因此，在遇到 de Rham 对偶的时候，我们总是试图换成 Poincaré 对偶来计算。

由于 Stokes 公式对任意 p 链成立，

$$< C_k, \mathrm{d}\omega > = < \partial C_k, \omega > \tag{15-25}$$

按照边界条件 15-1 至 15-4, ω 可以有四种不同的情况, 它们分别是

$$\omega = * \eta, \quad \omega = \eta, \quad \omega = \delta\eta, \quad \omega = * \mathrm{d}\eta \tag{15-26}$$

注意到 $\mathrm{d}\omega$ 是 p 形式, 对应四种情况分别有

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d} * \eta = \mathrm{d} * (\mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma) = (-1)^{\epsilon} * \Delta_{\delta}\alpha \tag{15-27}$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}(\mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma) = \Delta_{\mathrm{d}}\beta \tag{15-28}$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\delta\eta = \mathrm{d}\delta(\zeta + \xi + \gamma) = \Delta_{\mathrm{d}}\zeta \tag{15-29}$$

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d} * \mathrm{d}\eta = \mathrm{d} * \mathrm{d}(\zeta + \xi + \gamma) = (-1)^{\epsilon} * \Delta_{\delta}\xi \tag{15-30}$$

其中
$$\epsilon = p(m - p) \tag{15-31}$$

15-27 至 15-30 式右端的微分形式都是某个 de Rham 上同调群中的元素, 对应的 Stokes 公式为

$$< * C_k, (-1)^{\epsilon} * \Delta_{\delta}\alpha > = < \partial * C_k, * \eta_0 > \tag{15-32}$$

$$< C_k, \Delta_{\mathrm{d}}\beta > = < \partial C_k, \eta_0 > \tag{15-33}$$

$$< C_k, \Delta_{\mathrm{d}}\zeta > = < \partial C_k, \delta\eta_0 > \tag{15-34}$$

$$< * C_k, (-1)^{\epsilon} * \Delta_{\delta}\xi > = < \partial * C_k, * \mathrm{d}\eta_0 > \tag{15-35}$$

令

$$\alpha = \sum_j A_j * \Phi^j \quad * \Phi^j \text{span} * H^{m-p}(M) \quad \Delta_{\delta}\Phi^j = \lambda_j \Phi^j \tag{15-36}$$

$$\beta = \sum_j B_j \Phi^j \quad \Phi^j \text{span } H^p(M) \quad \Delta_{\mathrm{d}}\Phi^j = \lambda_j \Phi^j \tag{15-37}$$

$$\zeta = \sum_j D_j \Phi^j \quad \Phi^j \text{span } H^p(M) \quad \Delta_{\mathrm{d}}\Phi^j = \lambda_j \Phi^j \tag{15-38}$$

$$\xi = \sum_j E_j * \Phi^j \quad * \Phi^j \text{span} * H^{m-p}(M) \quad \Delta_{\delta}\Phi^j = \lambda_j \Phi^j \tag{15-39}$$

把 15-36 至 15-39 代入 15-32 至 15-35 可得

$$A_k\lambda_k = (-1)^{\epsilon} < \partial * C_k, * \eta_0 > \tag{15-40}$$

$$B_k\lambda_k = < \partial C_k, \eta_0 > \tag{15-41}$$

$$D_k\lambda_k = < \partial C_k, \delta\eta_0 > \tag{15-42}$$

$$E_k\lambda_k = (-1)^{\epsilon} < \partial * C_k, * \mathrm{d}\eta_0 > \tag{15-43}$$

15-40 至 15-43 式右端的 de Rham 对偶可以化为 Poincaré 对偶。设 Φ^j 满足

$$\delta_k^j = < C_k, \Phi^j > = \int_{C_k} \Phi^j$$

$$= \frac{1}{\lambda_j}\int_{C_k} \lambda_j \Phi^j = \frac{1}{\lambda_j}\int_{C_k} \mathrm{d}\delta\Phi^j = \frac{1}{\lambda_j}\int_{\partial C_k} \delta\Phi^j \tag{15-44}$$

或者

$$\frac{1}{\lambda_j} < \partial C_k, \delta\Phi^j > = \delta_k^j \tag{15-45}$$

因此存在与

$$f_1 : C_k \to \Phi^j \tag{15-46}$$

对应的映射

$$f_2 : \partial C_k \to \frac{1}{\lambda_j}\delta\Phi^j \tag{15-47}$$

类似地，设 $*\Phi^j$ 满足

$$\delta_k^j = < *C_k, *\Phi^j > = \int_{*C_k} *\Phi^j = \frac{1}{\lambda_j}\int_{*C_k} \lambda_j * \Phi^j$$

$$= \frac{1}{\lambda_j}\int_{*C_k} *\delta\mathrm{d}\Phi^j = \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j}\int_{\partial * C_k} *\mathrm{d}\Phi^j \tag{15-48}$$

或者

$$\frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j} < \partial * C_k, *\mathrm{d}\Phi^j > = \delta_k^j \tag{15-49}$$

因此存在与

$$h_1 : *C_k \to *\Phi^j \tag{15-50}$$

对应的映射

$$h_2 : \partial * C_k \to \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j} * \mathrm{d}\Phi^j \tag{15-51}$$

把 15-40 至 15-43 中的 de Rham 对偶换为 Poincaré 对偶

$$A_k = \frac{1}{\lambda_j^2} < *\mathrm{d}\Phi^k, *\eta_0 > = \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j^2}\int_M \mathrm{d}\Phi^k \wedge *\eta_0 \quad (15\text{-}52)$$

$$B_k = \frac{1}{\lambda_j^2} < \delta\Phi^k, \eta_0 > = \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j^2}\int_M \mathrm{d}*\Phi^k \wedge \eta_0 \quad (15\text{-}53)$$

$$D_k = \frac{1}{\lambda_j^2} < \delta\Phi^k, \delta\eta_0 > = \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j^2}\int_M \mathrm{d}*\Phi^k \wedge \delta\eta_0 \quad (15\text{-}54)$$

$$E_k = \frac{1}{\lambda_j^2} < *\mathrm{d}\Phi^k, *\mathrm{d}\eta_0 > = \frac{(-1)^\epsilon}{\lambda_j^2}\int_M \mathrm{d}\Phi^k \wedge *\mathrm{d}\eta_0 \quad (15\text{-}55)$$

对 $\lambda_k > 0$ 的情况，能够直接在 P^m 上积分确定上述各式中的常系数 A_k，B_k，C_k 和 D_k。当 $\lambda_k = 0$ 时，Φ^k 是调和 p 形式，根据命题 15-1，调和形式与边界条件无关。

如果物理问题中给定 $p = \dim(M)$，则上述四式中只有 15-53 和 15-55 是需要计算的。此时 p 链 C 是流形 M 上的一个已知的 m 维域 Ω。在求解 Schrödinger 方程的过程中，出现一个叫做尺度因子的常数，把 Ω 上的 Stokes 定理写为，

$$< \Omega, \Delta_d\beta > = < \partial\Omega, \eta_0 > \quad (15\text{-}56)$$

$$< \Omega, \Delta_d\zeta > = < \partial\Omega, \delta\eta_0 > \quad (15\text{-}57)$$

上述两式的右端是可以计算的数，左端是尺度因子的函数，可以唯一确定尺度因子。注意到命题 15-1，尺度因子与 M 上的调和解无关。由于 H^p 垂直于 H^{m-p}，所以 H^p 和 H^{m-p} 可以有各自独立的尺度因子。但是 H^p（或 H^{m-p}）中所有特征形式的尺度因子必须相同，只有唯一的尺度因子才能保证 Schrödinger 方程的特征解相互正交，进而保证同一个 H^p 上的 Φ^j 互相正交。从 15-56 和 15-57 还可以知道，尺度因子是被边界条件唯一确定的。至此，我们完成了边界条件反演。

经过反演，我们得到了 M 上的一个微分形式，通常这也是 M 上唯一一个已知的张量。如果流形是可积的，$\partial\Omega$ 是 $m-1$ 链的边界条件反演使我们直接得到流形上的 m 形式 $*\Phi$。则

$$\omega = d\Phi = 0 \tag{15-58}$$

就是 M 上的一阶物理定律。按照第七章给出的方法，指定定位和定向，就可以生成 $\mathfrak{g}(M)$ 和 $\mathfrak{g}^*(M)$，于是 M 上的任何几何性质都是可以计算的。

必须指出的是，边界条件反演并不一定限制在 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上，对 $T^*(M)$ 上的 p 形式也可以反演，这取决于边界条件是如何给定的。如果反演得到的是 1 形式 $\eta \in T^*(M)$，那么从 η 生成 $\mathfrak{g}^*(M)$ 还要费点儿事，具体方法见第八章。

第十六章　黑　洞

任意调和 p 形式 $\Theta \in H^p_{\text{harm}}$ 满足基本方程 12-20 至 12-22 或 12-32 至 12-34，从命题 15-1 我们知道 Θ 也必然是物理问题的解。

$$\Delta\Theta = 0 \tag{16-1}$$

由于 Θ 不涉及边界条件反演，无须展开为 Φ^l 的级数，不必要求解析和平方可积，因此 Θ 可以包含奇点，一个具有适当的态并且适当可微和可积的 Θ 可以是任何物理问题的解。考虑 $\Theta \in H^0_{\text{harm}}$ 的情况，16-1 成为通常的标量 Laplace 方程。

在球坐标下把 16-1 分解变量，解得

$$\Theta_{lm} = Y_l^m(\theta, \varphi)R_l(r) \tag{16-2}$$

其中 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 是球函数。

$$R_l(r) = Cr^l + D\frac{1}{r^{l+1}} \quad C, D \in R \tag{16-3}$$

是 Euler 型方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) - l(l+1)R = 0 \tag{16-4}$$

的解。因此

$$\Theta_{lm} = (Cr^l + D\frac{1}{r^{l+1}})P_l^m(\cos\theta)\begin{vmatrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{vmatrix} \tag{16-5}$$

16-5 在 $r \to \infty$ 时为无穷大，这样的物理场没有被观察到，所以令

$$C = 0$$

$$\Theta_{lm} = D\frac{1}{r^{l+1}}P_l^m(\cos\theta)\begin{vmatrix}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{vmatrix} \tag{16-6}$$

与从边界条件反演得到的解不同，16-6 在 $r = 0$ 是奇异的。我们把反演得到的解称为绕流解，把 16-6 称为第一类黑洞解。如果黑洞解关

于 φ 对称，则

$$\Theta_l = D \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta) \tag{16-7}$$

上式可以用球函数的加法公式写为球函数的加和，因此采用 Legendre 多项式的黑洞解是可以分裂为 16-6 的。如果黑洞解关于 θ 也对称，则

$$\Theta = \frac{D}{r} \tag{16-8}$$

$\Delta\Theta$ 可以看作是一个奇异流形的流形函数。满足 16-1 的 Θ 必是物理量，因此我们无须考虑把 Θ 展开为 Φ' 的级数，而可以直接根据以太的性质把 Θ 展开为 Schrödinger 方程的某个特征解序列 ϕ_{lmn} 的级数

$$\Theta = \sum_{lmn} A_{lmn} \phi_{lmn} \tag{16-9}$$

16-9 在 $r = 0$ 是奇异的，展开式中的 ϕ_{lmn} 可以是奇异的正交多项式。如果在径向采用 Euler 方程的解，而在 θ 向或 φ 向采用 $U(\theta) \neq 0$ 或 $U(\varphi) \neq 0$ 的 Schrödinger 方程特征解，就得到了有旋涡结构的黑洞解。具体求解方法与求解析调和解类似，可以参见附录Ⅳ或Ⅵ，本书不再深入研究。

用算子 Δ 作用于 16-9，

$$\Delta\Theta = \sum_{lmn} A_{lmn} \Delta\phi_{lmn} = \sum_{lmn} A_{lmn} U \phi_{lmn} = 0 \tag{16-10}$$

从 16-10 最后一个等号两端可以看出 $\Delta\Theta$ 确实是一个奇异流形函数。用递推的方法也可以从 16-10 得到解，如果这个解在除了孤立奇点外的全空间一致收敛，那么也是合理的解。

除了 16-1，我们还可以导出另外一种黑洞方程。假设物理问题定义在 Ω 上，Ω 是 M 上的一个 m 维区域。把 15-56 和 15-57 写成

$$\int_\Omega \Delta\Pi = \int_{\partial\Omega} \pi \tag{16-11}$$

上式中，当 Π 分别等于 β 和 ζ 时，π 分别等于 η_0 和 $\delta\eta_0$。

我们考虑 16-11 当 $\partial\Omega$ 趋于一点 x_0 的极限情况，令 $\boldsymbol{x}(\partial\Omega)$ 表示 $\partial\Omega$ 上的点在某个 P^m 中的坐标值。

如果
$$\lim_{|x(\partial\Omega)-x_0|\to 0}\int_{\partial\Omega}\pi = \infty \tag{16-12}$$
则无法得到有限的展开系数，因此不予考虑。如果
$$\lim_{|x(\partial\Omega)-x_0|\to 0}\int_{\partial\Omega}\pi = 0 \tag{16-13}$$
$$\lim_{|x(\partial\Omega)-x_0|\to 0}\int_{\Omega}\Delta\Pi = \int_M \Delta\Pi = 0 \tag{16-14}$$
de Rham 对偶是非退化的，因此必然有
$$\Delta\Pi = 0 \tag{16-15}$$
这正是 16-1。根据命题 15-1，调和函数的展开系数不能从 Stokes 公式得到。剩下只有
$$\lim_{|x(\partial\Omega)-x_0|\to 0}\int_{\partial\Omega}\pi = C \tag{16-16}$$
$C \in (0, \infty)$。不失一般性，令 $C = 1$。
$$\lim_{|x(\partial\Omega)-x_0|\to 0}\int_{\Omega}\Delta\Pi = \int_M \Delta\Pi = \int_{P^m}\Delta\Pi = 1 \tag{16-17}$$
所以
$$\Delta\Pi = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \tag{16-18}$$
其中 $\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 是 Dirac 函数。Π 与 Θ 性质不同，Θ 在全空间调和，而 Π 则在除了 $\boldsymbol{x}_0$ 的全空间调和。16-18 说明 Π 在 $\boldsymbol{x}_0$ 是奇异的，我们把 16-18 的解称作第二类黑洞解。$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$ 与 $\boldsymbol{u}^*$ 不能对易，为了保证 Π 是物理量，只能用 Φ^j 展开 Π，令
$$\Pi = \sum_j A_j \Phi^j \tag{16-19}$$
把 16-18 右端的 Dirac 函数也展开为 Φ^j 的级数，
$$\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = \sum_j a_j \Phi^j \tag{16-20}$$
两面用 Φ^k 作 Poincaré 标量积，

$$a_k = \int_M \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \wedge * \Phi^k = \int_{R^m} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \Phi^k \mathrm{d}v = \Phi^k(\boldsymbol{x}_0) \tag{16-21}$$

则 16-18 变成

$$\sum_j A_j \Delta \Phi^j = \sum_j A_j \lambda_j \Phi^j = \sum_j \Phi_0^j \Phi^j \quad \Phi_0^j = \Phi^j(x_0) \tag{16-22}$$

上式两面用 Φ^k 作 Poincaré 标量积，得到

$$A_k = \frac{\Phi_0^k}{\lambda_k} \tag{16-23}$$

可见，对任何态的 Φ^j，我们可以从方程 16-18 反演得到展开系数，最终得到 Π，把 Π 代入

$$\int_{P^m} \Delta \Pi = 1 \tag{16-24}$$

可以确定尺度因子。

第十七章　量子和涡子

注意到 $\Phi'(\lambda>0)$ 是被 ∂C 上的边界条件唯一决定的，所以 $\Phi'(\lambda>0)$ 附着在边界上，是不可运动的、稳定的，或者说 $\Phi'(\lambda>0)$ 是与弧长时间无关的。每一个 $\Phi'(\lambda>0)$ 是整个物理问题的解的一部分，它并不单独构成一个解，Φ' 的线性组合才是整个物理问题的一个解，这是 Φ' 不能单独运动的另一个原因。在湍流中，这个稳定解构成所谓层流解。在湍流实验中我们还观察到边界不断释放出涡子的现象，而且涡子的运动是自由的、非定常的。我们希望能够从 Φ' 生成一个相对于边界 ∂C 可运动的 p 形式解 Ψ，为了简洁起见，在以下的叙述中去掉 Φ' 的上标。令

$$\Psi = \Psi(t, x) \tag{17-1}$$

Ψ 是从 Φ 生成的，所以必有

$$\Psi\big|_{t=0} = \Phi \tag{17-2}$$

不妨假定

$$\Psi = \Phi(x)\phi(t) \tag{17-3}$$

ϕ 是 t 的标量函数，Ψ 满足的 Stokes 公式是

$$< C_p, \Delta\Psi >\big|_{t=0} = < C_p, \lambda\Phi\phi(t) >\big|_{t=0} = < \partial C_p, \pi > \tag{17-4}$$

上式中，当 Φ 分别等于 $*\alpha$、β、ζ 和 $*\xi$ 时，π 分别等于 $*\eta_0$、η_0、$\delta\eta_0$ 和 $*\mathrm{d}\eta_0$。令 O 是流形上的线性不变算子，且 O 仅仅作用于变量 t，如果

$$O\Psi = \Phi O\phi(t) = -\lambda\Phi\phi(t) \tag{17-5}$$

则

$$< C_p, O\Psi >\big|_{t=0} = < \partial C_p, -\pi > \tag{17-6}$$

把 17-4 和 17-6 两式相加

$$< C_p, (\Delta + O)\Psi >\big|_{t=0} = 0 \tag{17-7}$$

为了使 Ψ 的运动与 C_p 无关，17-7 必须在任何时刻都成立

$$< C_p, (\Delta + O)\Psi > = 0 \tag{17-8}$$

17-8 的左端是 de Rham 对偶，根据 de Rham 定理[20]，de Rham 对偶是非奇异的，所以 17-8 成立的充分必要条件是

$$(\Delta + O)\Psi = 0 \tag{17-9}$$

满足 17-9 的 Ψ 在任何时刻与 ∂C_p 上的边界条件无关，可以自由运动。取

$$O = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \tag{17-10}$$

17-9 就是波动方程。当 $p = 0$、$m = 3$ 时 17-9 成为

$$\begin{aligned} \Box \Psi &= \Delta_0 \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{c^2 \partial t^2} \\ &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{c^2 \partial t^2} = 0 \end{aligned} \tag{17-11}$$

Ψ 是从 Φ 生成的，所以令

$$\Psi|_{t=0} = \Phi \tag{17-12}$$

$$\left.\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \tag{17-13}$$

把 17-11 式分解变量，得

$$\Delta_0 \Phi = \lambda \Phi \tag{17-14}$$

和

$$\frac{d^2 \phi_k}{dt^2} + c^2 \lambda \phi_k = 0 \tag{17-15}$$

为了满足 17-12 和 17-13，令

$$\phi_k|_{t=0} = 1 \tag{17-16}$$

$$\left.\frac{d\phi_k}{dt}\right|_{t=0} = 0 \tag{17-17}$$

显然，这里的 Φ 就是第十四章已经求出的 Δ 算子的特征 0 形式，17-15 的通解是

$$\phi_k(t) = A_k \sin(c\sqrt{\lambda}t) + B_k \cos(c\sqrt{\lambda}t) \tag{17-18}$$

由于 Ψ 不必再经过边界条件反演，所以与 t 有关的项 $\phi_k(t)$ 不必在 $(-\infty,\infty)$ 上平方可积。注意到条件 17-16 和 17-17 有

$$A_k = 0 \qquad B_k = 1 \tag{17-19}$$

如果令初始条件为

$$\phi_k\Big|_{t=\frac{\pi}{2c\sqrt{\lambda}}} = 1 \tag{17-20}$$

$$\frac{\mathrm{d}\phi_k}{\mathrm{d}t}\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2c\sqrt{\lambda}}} = 0 \tag{17-21}$$

则有

$$A_k = 1 \qquad B_k = 0 \tag{17-22}$$

最后

$$\Psi = \sum \Psi_{lmn} \tag{17-23}$$

$$\Psi_{lmn} = \Phi_{LMN}\begin{Bmatrix}\sin(c\sqrt{\lambda}t)\\ \cos(c\sqrt{\lambda}t)\end{Bmatrix} \tag{17-24}$$

如果取 Φ_{LMN} 为 Δ 算子的特征解，例如气态解 Φ_{lmN}

$$\Psi = \sum \Psi_{\lambda lmN} \tag{17-25}$$

$$\Psi_{\lambda lmN} = \Phi_{lmN}\begin{Bmatrix}\sin(c\sqrt{\lambda}t)\\ \cos(c\sqrt{\lambda}t)\end{Bmatrix} \tag{17-26}$$

我们称解 17-26 为量子，$\lambda=0$ 的解是中子，$\lambda\neq 0$ 的解是质子或电子。如果取 Φ_{LMN} 为 14-4，此时 $k=\sqrt{\lambda}$ 是待定常数，对应的解为

$$\psi_{klm} = j_l(kr)P_l^m(\cos\theta)\begin{vmatrix}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\cos(kct)\\ \sin(kct)\end{vmatrix} \tag{17-27}$$

球 Bessel 函数可以表示为[24]

$$j_l(kr) = (-1)^l\sqrt{\frac{2kr}{\pi}}\,\frac{(kr)^l}{k^2 r}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)^l\left(\frac{\sin(kr)}{kr}\right) \tag{17-28}$$

所以

$$\psi_{klm} = [(-1)^l\sqrt{\frac{2kr}{\pi}}\frac{(kr)^l}{k^2r}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r})^l(\frac{\sin(kr)}{kr})]Y_l^m\begin{vmatrix}\cos(kct)\\ \sin(kct)\end{vmatrix}$$

$$= Y_l^m(-1)^l\sqrt{\frac{2kr}{\pi}}\frac{(kr)^l}{2k^2r}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r})^l[\frac{1}{kr}$$

$$\begin{vmatrix}\sin[k(r+ct)]+\sin[k(r-ct)]\\ -\cos[k(r+ct)]-\cos[k(r-ct)]\end{vmatrix}] \tag{17-29}$$

显然 ψ_{klm} 是以速度 c 沿着径向传播的球面波，如果 k 只能取离散值，我们定义 ψ_{klm} 为光子，如果 $k=0$，ψ_{olm} 为中微子。与波动方程相比，从

$$\bar{\omega} = kc = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \tag{17-30}$$

和

$$cT = \bar{\lambda} \tag{17-31}$$

可以算出圆频率 $\bar{\omega}$、周期 T、频率 ν 和波长 $\bar{\lambda}$，其中的光速 c 就是在定义弧长时间的时候引入的常数，光速不变是物理上熟知的事实。

如果取

$$O = \frac{\partial}{c\partial t} \tag{17-32}$$

17-9 就成为扩散方程。我们用

$$\Xi = \Phi(x)\eta(t) \tag{17-33}$$

来表示方程的解，当 $p=0$，流形的维数 $m=3$ 时，与 17-11 和 17-16 对应有

$$\Diamond\Xi = \Delta_8\Xi + \frac{\partial\Xi}{c\partial t} = -\frac{\partial^2\Xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Xi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Xi}{\partial z^2} + \frac{\partial\Xi}{c\partial t} = 0 \tag{17-34}$$

$$\eta|_{t=0} = 1 \tag{17-35}$$

分解变量以后得

$$\Delta\Phi = \lambda\Phi \tag{17-36}$$

和

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} + c\lambda\eta = 0 \tag{17-37}$$

解得

$$\eta(t) = e^{-\lambda ct} \tag{17-38}$$

最后

$$\Xi = \sum \Xi_{\lambda lmn} \tag{17-39}$$

$$\Xi_{\lambda lmn} = \Phi_{LMN} e^{-\lambda ct} \tag{17-40}$$

取 Φ_{LMN} 为 14-4，此时 $k = \sqrt{\lambda}$ 是待定常数。

$$\nu_{klm} = j_l(kr) P_m^l(\cos\theta) \begin{vmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{vmatrix} e^{-\lambda ct} \tag{17-41}$$

ν_{klm} 可以自由运动。

取 Φ_{LMN} 为 Δ 算子的气态解 Φ_{lmN}

$$\Xi_{\lambda lmN} = \Phi_{lmN} e^{-\lambda ct} \tag{17-42}$$

我们称解 17-42 为涡子。涡子的性质与量子完全不同，当 $t \to \infty$ 时，量子保持初始能量基本不变，而涡子的能量迅速趋于 0。根据能量守恒原理，涡子把能量释放到空间中去了。

既然量子和涡子可以脱离 $\partial\Omega$ 自由运动，它们其实是独立于 M 的流形，我们称之为量子流形 $M_\lambda \otimes R$。17-11 和 17-34 分别是量子和涡子的局部微分方程，量子流形是 $m+1$ 维的，$\Psi_{\lambda lmN}$ 或 $\Xi_{\lambda lmN}$ 是量子流形的流形函数。以三维流形为例，气态的 Ψ 和 Ξ 可以用四个量子数 l、m、N 和 λ 标识。$\Psi_{\lambda lmN}$ 或 $\Xi_{\lambda lmN}$ 可以组成不同的子空间，例如，给定 l、λ 和 N，$\{\Psi_{\lambda lmN}\}$ 和 $\{\Xi_{\lambda lmN}\}$ 构成 $2l+1$ 维线性子空间 S_Ψ 和 S_Ξ，简写为 Ψ' span S_Ψ 和 Ξ' span S_Ξ。S_Ψ 和 S_Ξ 可以用三个量子数 l、λ 和 N 来标识，它们中的任何一个元素 Ψ 或 Ξ 可以由 Ψ_{lmN} 或 Ξ_{lmN} 线性组合得到，对于 $\lambda > 0$ 的量子和涡子，组合系数就是在边界条件反演中求出的系数。

既然第二类黑洞解可以展开为 Φ' 的级数，黑洞也可以释放出 ψ、ν、Ψ 和 Ξ，因此第二类黑洞实际上并不"黑"；相比之下，第一类黑洞要"黑"得多，因为第一类黑洞最多可能释放出解析的调和解，也就是中子。

第十八章　量子和涡子的性质

要想知道涡子和量子的几何性质，就要能够生成作用在切空间 $\mathfrak{g}(M_\lambda \otimes R)$ 上的群表示，这首先必须确定对应的结构群。涡子和量子的结构群生成方法相同，下面我们只讨论如何生成量子上的结构群。注意到初始条件17-2，M 的结构群 G 必然是量子流形 $M_\lambda \otimes R$ 的结构群 $\bar{G}$ 的一个子群。不失一般性，我们令

$$\bar{G} = G \otimes H \tag{18-1}$$

这里 H 是另外一个 Lie 群。$T(M_\lambda \otimes R)$ 比 $T(M)$ 多了一个自然基底 $\frac{\partial}{\partial t}$，所以 $T(M_\lambda \otimes R)$ 和 $\bar{G}$ 都是 $m+1$ 维的，我们知道 G 的维数是 m，这样 H 必然是一个一维 Abel 群，作用在变量 t 上。Abel 群的 Lie 代数是可交换的，在第六章我们已经知道，可交换代数生成欧氏空间，所以数轴 t 是一个一维欧氏空间，t 上有加法群

$$t = t_1 + t_2 \tag{18-2}$$

这样一来，G 只作用在 x^k 上，H 只作用在 t 上，时间是均匀流动的，而且与空间无关，我们得到的是所谓 Newton 时空。在 Newton 时空 $M \otimes R$ 中，t 上作用着与 G 不同构的一维 Lie 群，因此时间 t 是不能在 M 上直接观测的。但是我们知道时间是均匀流动的，给定一个起点和尺度，我们可以用 M 上一个近似的匀速运动来度量时间，例如地球的自转或公转，摆或原子的振动，水或沙子的滴漏等等。按照我们的定义，弧长时间是单调增加的，因此 Newton 时空中的时间是不可倒流的，这完全符合我们观测到的物理现实。

令 $\bar{G}$ 的 Lie 代数为 $\bar{\mathfrak{g}}$，则

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus h \tag{18-3}$$

这里 h 是一维 Lie 代数。设 $M_\lambda \otimes R$ 的代表流形是 $\bar{O} = O \otimes R$，令 $\bar{O}$ 的余速度空间 $\mathfrak{g}(\bar{O})$ 由

$$\theta^k, c\mathrm{d}t; \qquad k = 1,2,\cdots,m \tag{18-4}$$

张成，其中

$$\theta^j = b^j_k \mathrm{d}y^k \tag{18-5}$$

就是 $\mathfrak{g}^*(O)$ 的基底。按照第七章给出的方法，任意指定定位和定向，就可以求出映射

$$\bar{F}: \bar{O} \to M_\lambda \otimes R \tag{18-6}$$

进而生成 $\mathfrak{g}(M_\lambda \otimes R)$ 和 $\mathfrak{g}^*(M_\lambda \otimes R)$ 以及 $\bar{G}$。令 $\bar{\mathrm{d}}$ 为 $\mathfrak{g}^*(M_\lambda \otimes R)$ 上的外微分算子，

$$\bar{\mathrm{d}}\Psi \in \mathfrak{g}^*(M_\lambda \otimes R) \tag{18-7}$$

我们可以直接从 $\bar{\mathrm{d}}\Psi$ 生成 $\bar{G}$ 的一个单参数子群。具体做法如下：考虑一个如 17-26 的解 $\Psi_{\lambda lmN}$

$$\mathrm{d}\Psi_{\lambda lmN} = a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial x^j}\cos(kct)\mathrm{d}x^j - kc\Phi_{lmN}\sin(kct)\mathrm{d}t \tag{18-8}$$

$$j = 1,2,\cdots,m \qquad \alpha = 1,2,\cdots,m+1$$

若 M 是三维流形，采用球坐标系

$$\mathrm{d}\Psi_{\lambda lmN} = a_\alpha \mathrm{d}x^\alpha = \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial r}\cos(kct)\mathrm{d}r + \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial \theta}\cos(kct)\mathrm{d}\theta$$

$$+ \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial \varphi}\cos(kct)\mathrm{d}\varphi - kc\Phi_{lmN}\sin(kct)\mathrm{d}t \tag{18-9}$$

这是一个 Pfaff 方程，注意到 $M_\lambda \otimes R$ 是 Newton 时空，作用在 t 上的是加法群，对应的速度分量恒为常数，把上式写成

$$-\left[\frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial \Phi_{lmN}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right]$$

$$\frac{\cos(kct)}{c^2\Phi_{lmN}k\sin(kct)} + \frac{1}{c}\mathrm{d}t = 0 \tag{18-10}$$

特征线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{1}{kc^2\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial r}\dfrac{\cos(kct)}{\sin(kct)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{1}{kc^2\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial\theta}\dfrac{\cos(kct)}{\sin(kct)} \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = -\dfrac{1}{kc^2\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial\varphi}\dfrac{\cos(kct)}{\sin(kct)} \end{cases} \tag{18-11}$$

和

$$\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}t \tag{18-12}$$

18-12 说明可以用一个匀速运动来度量时间。把 18-12 代入 18-11，令

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = -\frac{\cos(kct)}{kc\sin(kct)} \text{ 或 } \tau = -\frac{1}{k^2c}\ln[\sin(kct)] \tag{18-13}$$

18-11 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial r} \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial\theta} \\ \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau} = \dfrac{1}{\Phi_{lmN}}\dfrac{\partial\Phi_{lmN}}{\partial\varphi} \end{cases} \tag{18-14}$$

$$r|_{\tau=0} = r_0,\quad \theta|_{\tau=0} = \theta_0,\quad \varphi|_{\tau=0} = \varphi_0 \tag{18-15}$$

设 18-14 的解为

$$\begin{aligned} r &= f(\boldsymbol{r}_0,\tau) = F[\boldsymbol{r}_0,\sin(kct)] \\ \theta &= g(\boldsymbol{r}_0,\tau) = G[\boldsymbol{r}_0,\sin(kct)] \\ \varphi &= h(\boldsymbol{r}_0,\tau) = H[\boldsymbol{r}_0,\sin(kct)] \end{aligned} \tag{18-16}$$

其中 $\boldsymbol{r}_0 = (r_0,\theta_0,\varphi_0)$，这个解是弧长时间 t 的周期函数。如果 18-16 的一个渐近稳定域上有一个平衡点 $\boldsymbol{r}^* = (r^*,\theta^*,\varphi^*)$，则渐近稳定域上的质量将向平衡点汇聚。令 18-14 满足

$$r|_{\tau\to\infty} = r^*,\quad \theta|_{\tau\to\infty} = \theta^*,\quad \varphi|_{\tau\to\infty} = \varphi^* \tag{18-17}$$

可以得到解

$$\begin{aligned} r &= f^{*}(\boldsymbol{r}^{*},\tau) = F^{*}[\boldsymbol{r}^{*},\sin(kct)] \\ \theta &= g^{*}(\boldsymbol{r}^{*},\tau) = G^{*}[\boldsymbol{r}^{*},\sin(kct)] \\ \varphi &= h^{*}(\boldsymbol{r}^{*},\tau) = H^{*}[\boldsymbol{r}^{*},\sin(kct)] \end{aligned} \tag{18-18}$$

平衡点的坐标也是 $\sin(kct)$ 的函数，因此相图上的一个平衡点对应三维空间上的周期性轨道，我们称 F^{*}、G^{*} 和 H^{*} 为轨道函数。注意到18-13变换式中的ln函数，不是任何 F^{*}、G^{*} 和 H^{*} 都能给出稳定的轨道。在渐进稳定域上汇聚的结果是周期性轨道上运动的点质量，也就是行星或者电子、质子。相图上的极限环对应土星光环或小行星带那样的结构。在质量密度较高的稳定但非渐进稳定区域上将形成变星，变星的体积和亮度会不断地发生变化，这种变化可以是周期的，也可以是非周期的，但决不是单调的。

从18-16可以微分得到作用在量子上的单参数子群的酉表示，引用第七章的方法生成量子流形的速度空间，然后可以求出量子流形的所有几何性质。

第十九章　常用物理量的定义

现在，我们已经有了一些基本的定理和方程，为了使整个理论与近代物理学接轨，需要定义若干常用的基本物理量。

我们定义的弧长时间不一定就是通常所说的时间，以三维空间为例，如果 $\partial\Omega$ 上的边界条件是定常的，则弧长时间就是通常所说的时间 t，弧长与时间的关系可以定义为

$$ds = c dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \tag{19-1}$$

如果 $\partial\Omega$ 上的边界条件是非定常的，问题就变成四维的了（$m = 4$），弧长时间为 τ

$$ds = c d\tau = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 + (dt)^2} \tag{19-2}$$

此时通常所说的时间 t 的定义仍然是 19-1，如果四维流形上作用着一个可以有四维表示的结构群，由此产生时间的相对论效应。但是这个四维流形上的物理过程一般是不能在三维流形上观测的，因为这两个流形不同构。一个特殊情况是四维流形的时间部分和空间部分分别作用着各自的结构群，时间和空间在各自的结构群作用下有各自独立的运动。如果四维流形空间部分的结构群与某个三维流形的结构群同构，则这两个流形的空间部分互相可以观测，而四维流形的时间部分则不能够在三维流形上观测，这就是所谓的 Newton 时空。另一个特殊情况是四维流形的结构群由两个同构的子群构成，而这两个子群恰好就是作用在三维流形上的结构群，则这个四维流形可以在原来的三维流形上被观测到，例如我们知道 $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$，实际上，$SO(3)$ 就是通常我们观测到的物理空间中的结构群，而 $SO(4)$ 就是相对论时空中的结构群。

设 $\Phi = C$ 是可积流形 M 上的 0 阶物理定律，Φ 是流形函数

定义 19-1：称

$$\rho = \frac{\Phi \wedge * \Phi}{\mathrm{d}v} = \Phi^2 \tag{19-3}$$

为流形的质量密度。其中 $\mathrm{d}v$ 是微元体积，在球坐标中，

$$\mathrm{d}v = r^2 \sin\theta \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{19-4}$$

定义 19-2：称

$$m = \int_M \rho \mathrm{d}v = \int_{P^m} \rho \mathrm{d}v \tag{19-5}$$

为流形 M 的质量，显然在可定向流形上 $\rho \geqslant 0$。根据我们的定义，不可积的流形是没有质量的。在物理上，这样的流形表现为无质量的场，例如电磁场。可积的偏微分方程也可以积分得到流形函数，因此也具有质量。我们称逆变张量的质量为反质量，反质量组成的物质为反物质，用度规张量作用于协变张量，可以得到反物质。注意到量子和涡子质量的定义就是量子流形函数的空间部分 Φ^j 的 Poincaré 标量积，对不相同的 j，Φ^j 是互相正交的，因此尽管质量的定义是非线性的，在任何不会改变量子和涡子的物理过程中，质量仍然具有可加和性。

定义 19-3：设 V 是 $\mathfrak{g}(M)$ 或 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上的一阶张量，Φ 是 V 的积分，是 M 的流形函数。称

$$V = v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad 和 \quad V = v_k \mathrm{d}x^k \tag{19-6}$$

为逆变速度张量和协变速度张量。称

$$P = \Phi^2 V = \rho V \tag{19-7}$$

为 V 的动量张量，$P \in T(M)$ 或 $T^*(M)$。V 的特征线方程

$$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = v^k \tag{19-8}$$

就是速度分量的定义，这也是我们把 $\mathfrak{g}(M)$ 称为速度空间的原因。上式的积分曲线

$$x^j = u^j(t, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu}) \tag{19-9}$$

为 V 的轨迹或流线。动量张量与速度张量显然是等价的，它们之间仅相差一个积分因子 ρ。如果在边界上给定的是动量边界条件，反演得到 0 形式 Φ，则一阶协变张量 $\mathrm{d}\Phi$ 就是 $T^*(M)$ 上的动量张量，

$$P = \frac{\partial \Phi}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \tag{19-10}$$

定义 19-4：逆变偏微分算子 $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}$ 为动量算子。动量算子作用在 Φ 上就得到动量张量的分量

$$\boldsymbol{P} = \{P_k\} = \frac{\partial}{\partial x^k} \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{19-11}$$

一般地，动量算子不单独构成不变算子，也不张成 $\mathfrak{g}(M)$，因为动量算子总是对易的。

定义 19-5：角动量算子

$$J_k = [A_k]_i^j x^i \frac{\partial}{\partial x^j} \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, m \tag{19-12}$$

其中 A_k 是结构群的 Lie 代数的 m 维表示。显然

$$[J_i, J_j] = C_{ij}^k J_k \tag{19-13}$$

而且 $$u^*[J_i, J_j] = [u^* J_i, u^* J_j] = C_{ij}^k u^* J_k \tag{19-14}$$

所以 $J_k(\Phi) = 0$ 是 M 上的物理定律，角动量算子 J_k 是 M 上的张量算子。当结构群是 SO_m 的时候，采用 Descartes 坐标

$$\boldsymbol{J} = (x^j \frac{\partial}{\partial x^k} - x^k \frac{\partial}{\partial x^j})\Phi = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{P} \tag{19-15}$$

角动量算子的模的平方，也就是 Casimir 算子，

$$J^2 = G^{kj} J_j J_k \tag{19-16}$$

必然是标量不变算子，事实上，当 $m = 3$，结构群是 SO_3 的时候，采用球坐标，

$$J^2 Y_{lm} = [-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}] Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$$

(19-17)

特征函数 Y_{lm} 就是球函数。可见 Y_{lm} 是量子和涡子的角动量。

定义 19-6:我们把力定义为

$$\frac{\mathrm{d}(\rho v^k)}{\mathrm{d}t} = F^k \tag{19-18}$$

19-18 两面用 $v_k \mathrm{d}x^k$ 作全微分对偶,

$$\frac{\mathrm{d}(\rho v^k)}{\mathrm{d}t} v_k = F^k v_k \tag{19-19}$$

为力 F^k 沿 $v_k \mathrm{d}x^k$ 的特征线的功率。

定义 19-7:设 ω 是 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上的 p 形式 $0 < p < m$,称

$$e = \frac{\omega \wedge * \omega}{\mathrm{d}v} \tag{19-20}$$

为 ω 的能量密度。如果流形是可定向的,$e \geqslant 0$。

定义 19-8:称

$$E = \int_M \omega \wedge * \omega = \int_{P^m} \omega \wedge * \omega \tag{19-21}$$

为能量,这正是 ω 的 Poincaré 标量积。E 是正定的,$E \geqslant 0$, $E = 0$ 当且仅当 ω 所有分量恒等于 0。

定义 19-9:设 ω 是 M 上的 p 形式,称

$$\alpha = \Delta_d \omega \tag{19-22}$$

为电场强度。显然只有当 $\omega \sim \gamma \in H^p_{\mathrm{harm}}$ 时,ω 才有非零的电场强度。如果 $\delta\omega$ 是 0 形式,称 $\delta\omega$ 为电荷。另外,称

$$\beta = \Delta_\delta \omega \tag{19-23}$$

为磁场强度。显然只有当 $\omega \sim * \gamma \in H^p_{\mathrm{harm}}$ 时,ω 才有非零的磁场强度。我们知道 Φ_{lmN} 要么与 γ 上同调,要么与 $* \gamma$ 上同调,因此 Φ_{lmN} 要么有电场,要么有磁场,不会二者兼有。实验表明,恒星有磁场,而原子有电场。

定义 19-10:设 $\omega \in \mathfrak{g}^*(M)$,则 $\mathrm{d}\omega$ 是 ω 的旋度;$\delta\omega$ 是 ω 的散度。

第二十章　原子结构

在前面各章中我们求出了量子和涡子，尽管量子和涡子可以展开为 Schrödinger 方程的解的级数，但是 Schrödinger 方程不是物理定律，它的解不是物理量。或者说 Schrödinger 方程的解是不可观测的，只有量子和涡子才是可以观测到的最基本的物质单位，是基本粒子。本章的大部分结论也适用于涡子，为了叙述简洁起见，我们只以量子为例讨论。

结构定则 20-1：只有当一组量子能够支撑结构群的一个不可约表示的时候，这组量子才会在一起运动；只有当这个不可约表示对应的微分方程组是全局稳定的，这组量子才构成一个稳定的体系。

我们称这样的一组量子为量子体系，量子体系可以对应物理上的原子或恒星系。本章的任务就是在所有的量子中找出能够支撑结构群的不可约表示的线性空间，描述量子体系的结构，并且求出作用在量子体系上的群表示。

我们已经知道，给定 λ、l、m、N，可以标识 Δ 算子的气态特征解

$$\Phi_{lmN} = K\phi_l\phi_m\sum_{n=0}^{N-1}A_n\phi_n \tag{20-1}$$

K 是归一常数，从 Φ_{lmN} 可以生成能够自由运动的量子流形

$$\Psi_{klmN} = \phi_k\Phi_{lmN} = K\phi_l\phi_m\phi_k\sum_{n=0}^{N-1}A_n\phi_n \tag{20-2}$$

首先，我们注意到 Ψ_{klmN} 是简并的：由于

$$\phi_m = \begin{Bmatrix}\sin(m\varphi)\\ \cos(m\varphi)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}P_m^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\\ P_m^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\end{Bmatrix} \tag{20-3}$$

同一个 m 有两个 ϕ_m 与之对应。这里 $P_m^{\alpha,\alpha}$ 是 Jacobi 多项式。为了区别这两个解我们定义一个新的自旋量子数 s

$$s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \tag{20-4}$$

这样,在同一条轨道上有两个自旋相反的电子或质子在运动,从 sin 和 cos 函数的性质知道它们的相位相差 $\pi/2$。以气态解为例:

$$\Psi_{klmNs} = P_l^m(\cos\theta) P_m^{s,s}(\cos\varphi) \begin{vmatrix} \cos(kct) \\ \sin(kct) \end{vmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} A_n (\mu r)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\mu r}{2}} L_n^{\alpha}(\mu r) \tag{20-5}$$

其中 $A_n \in R$,在附录 Ⅱ 中我们已经知道 A_n 可以递推求出,

$$\alpha = 2l + 1 \quad s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad 0 \leqslant l \leqslant \frac{N-1}{2} \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l$$

$$N = 0, 1, 2, \cdots \quad k = \pm\sqrt{\lambda} \qquad \mu > 0 \quad c > 0$$

$k = 0$ 得到中子;$k \neq 0$ 的时候得到的是质子或电子,λ 由第十四章给出的公式决定。当上述这些常数取值不相同的时候我们就得到不同的基本粒子。

$\{\Psi_{klmNs}\}$ 最显而易见的子空间是当除了 m 和 s 以外所有量子数都取固定的常数,从

$$s = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \quad \text{和} \quad m = 0, 1, 2, \cdots, l \tag{20-6}$$

可以得到 $\{\Psi_{klmNs}\}$ 的 $2l+1$ 维子空间 $\{\Psi_{ms}\}$。在量子力学[2] 中我们熟知 $\{\Psi_{ms}\}$ 可以支撑一个 $2l+1$ 维的结构群表示,这个量子体系构成电子亚层,除了 $m = 0$ 以外,每个 m 对应有两条轨道,所以每个电子亚层上可以有 $2l+1$ 个电子。还应该能找到其他的线性子空间支撑结构群的表示,否则按照定则 20-1 原子就会以亚层为单位散架了。由于量子数 m 不出现在决定气态解的 λ 的代数方程 14-16 中,所以 m 与量子的能量无关;给定 N,l 可以等于 $0, 1, \cdots, \frac{N-1}{2}$,这样构成的量子体系 $\{\Psi_{lms}\}$ 是电子层;给定 n,令 $N = 1, 2, \cdots, n$。这样,具有

若干个电子层和质子层的量子体系$\{\Psi_{klmNs}\}$就是原子；给定 N 和 l，14-16 可以有不止一个解 $k=\pm\sqrt{\lambda}$，这些解构成同位素。

我们注意到$\{\Psi_{klmNs}\}$的任何两个基底是正交的，以气态解为例，如果两个量子的 s 不同，则由于 $\cos(m\varphi)$ 与 $\sin(m\varphi)$ 在$[0,2\pi]$上正交，两个量子是正交的；如果 s 相同，m 不同，则 $\cos(m\varphi)$ 和 $\sin(m\varphi)$ 对于不同的 m 在$[0,2\pi]$上正交，所以两个量子正交；如果 s 和 m 都相同，l 不同，则 Legendre 函数对于相同的 m 和不同的 l 在$[0,\pi]$上正交，所以两个量子正交；如果 s、m 和 l 都相同，λ 不同，则从 Δ 算子特征形式的性质知道两个量子仍然正交。这样$\{\Psi_{klmNs}\}$的任意一组有限个基底构成$\{\Psi_{klmNs}\}$的一个有限维线性子空间 V，即若

$$\Psi_1,\Psi_2\in V$$

则

$$\Psi=\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2\in V\quad \alpha,\beta\in R \tag{20-7}$$

从群表示论知道 V 可以支撑结构群 G 的一个表示 $A(u)$，$u\in G$。如果这个子空间上作用的群表示使这个子空间封闭，我们就找到了一个量子体系。在以下的叙述中我们把 Ψ_{klmNs} 简单表示为 $\Psi^{\prime}$，现在我们来生成这个群表示。

定理[20]（Liouville）20-2：若 M 是紧的连通的定向 m 维 Riemann 流形，则 M 上的任一调和函数等于常数。

考虑到可观测性，用于生成这个群表示的 Lie 代数 $\mathfrak{g}_s$ 必须与 $M(G(\mathfrak{g}),\phi)$ 的 Lie 代数同构，我们取

$$\mathfrak{g}_s=\overbrace{\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}}^{s\text{ 个}}\quad s\text{ 是正整数} \tag{20-8}$$

按照第十七章中的叙述，$\Psi^{\prime}$ 是 $M_\lambda\otimes R$ 上的调和函数，从 Liouville 定理知道

$$\Psi^{\prime}=C^{\prime}\qquad C^{\prime}\in R \tag{20-9}$$

20-9 可以看作是 $M_\lambda\otimes R$ 上的以 $C^{\prime}$ 为参数的局部超曲面族。由 n 个 $\Psi^{\prime}$ 构成一个线性空间，20-9 可以写为

$$\Psi^j(t, x^1, \cdots, x^m) = y^j \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{20-10}$$

如果把$\{y^j\}$看作流形 O^n 上的局部坐标，20-10 是一个映射

$$\Psi: M_\lambda \otimes R \to O^n \tag{20-11}$$

在流形 O^n 上，可以用 $\mathfrak{g}_s$ 的 n 维表示 A_k 生成 $\mathfrak{g}(O^n)$，即

$$Y_k = [A_k]^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i} \quad i, j, k = 1, 2, \cdots, n \tag{20-12}$$

式中 A_k 是 $n \times n$ 反 Hermite 矩阵，求 A_k 的方法可以参见任何论述 Lie 代数表示的参考书籍。任何一个矢量 $Y \in \mathfrak{g}(O^n)$ 可以表示为

$$Y = [A]^i_j y^j \frac{\partial}{\partial y^i}$$

其中
$$A = \sum_{k=1}^{n} \mu^k A_k \quad \mu^k \in R \tag{20-13}$$

Y 的特征方程为

$$\frac{dy^k}{dt} = [A]^k_j y^j \tag{20-14}$$

$$y^k|_{t=0} = y^k_0 \tag{20-15}$$

这里的 t 仍然 M 上的是弧长时间。20-14 的解是

$$y = e^{At} y_0 = e^{\sum_{a=1}^{n} \mu^a A_a t} y_0 \tag{20-16}$$

或
$$\Psi = e^{At} \Psi_0 = e^{At} \Phi \tag{20-17}$$

其中 $\Psi = (\Psi^1, \Psi^2, \cdots, \Psi^n) \quad \Psi_0 = (\Psi^1_0, \Psi^2_0, \cdots, \Psi^n_0)$
$\Phi = (\Phi^1, \Phi^2, \cdots, \Phi^n)$。

可见，正是结构群的这个酉表示把 Φ 从边界上或奇点上不断剥离出来，使之成为自由的量子。这个群表示与第六章中讨论的群表示是不同的，我们把第六章的表示称为物理表示，把本章定义的表示称为结构表示，这两种群表示不一定是从同一个 Lie 代数生成。与它们对应的可观测性是不同的，物理表示使我们能够观测到单个量子的流形函数在观测空间上每一点的值，而结构表示使我们能够观测到

一组量子作为一个整体的空间结构。在不会发生误会的情况下，我们把二者都简称为表示。

虽然不同物理世界之间不存在光滑映射，它们之间是不可观测的，但是可能存在正整数 q，在 Δ 算子的一个 q 维特征子空间 $\{\Psi^r\}$ 上可以同时支撑两个物理世界的结构群的表示。这样一来，任何 $\Psi \in \{\Psi^r\}$ 在两个物理世界都是可以被观测到的。设想物理世界 W_1 上的一个物体的质量的一个很小的百分比是由 Ψ 的质量组成，则该物体在物理世界 W_2 中看上去是一个虚无缥缈的幻影。

使 V 中的每一个 Ψ^r 保持在一起运动的唯一原因就是作用在 V 上的不可约结构表示。张成 V 的每一个 Ψ^r 是线性无关的，所以 V 中的任何两个 Ψ^r 不可能具有完全相同的量子数，于是我们得到结论：保持在一起运动的若干量子中不会有两个量子具有完全一样的量子数。这就是 Pauli 不相容原理对原子所下的结论。

令
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - e^{At}\boldsymbol{y}_0 \tag{20-18}$$
20-14 和 20-15 变为
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = A\boldsymbol{x} \tag{20-19}$$
$$\boldsymbol{x}\big|_{t=0} = 0 \tag{20-20}$$

对 20-19 的零解也可以进行稳定性讨论，其结果可能有三种：全局稳定但非渐进稳定，全局渐进稳定和全局不稳定。如果 20-19 是全局稳定而非渐进稳定的，量子体系会时大时小地变化，其变化可以是周期的，也可以是不规则的；如果 20-19 是全局渐进稳定的，则对应的量子体系是稳定的，形成我们通常观测到的原子和恒星系；如果 20-19 是全局不稳定的，则对应的量子体系将发生裂变反应，反应生成若干量子体系。一个量子体系是稳定的、渐进稳定的或是不稳定的取决于 $\mathfrak{g}_t$ 的表示矩阵 A 的性质，关于这一点我们有定理：

定理[11]20-3：对应于矩阵 A 的特征根的不同情况，关于微分方程 20-19 的零解的稳定性有以下结论：

1. 若特征根均具有负实部，则方程组的零解是渐进稳定的。
2. 若存在具有正实部的特征根，则方程组的零解是不稳定的。
3. 若矩阵 A 没有正实部的特征根，但有纯虚特征根（包括零根），这时：
   a. 若所有纯虚特征根对应的 Jordan 块都是一阶的（或等价地：其重数等于其所对应的特征向量的个数）则方程组的零解是稳定的，但非渐进稳定。
   b. 若至少有一个纯虚特征根，其对应的 Jordan 块高于一阶（或其重数大于其所对应的特征向量的个数），则方程的零解是不稳定的。

$\mathfrak{g}_r$ 的任何元素的矩阵表示 A 可以写为 20-13，但是矩阵 A 的特征根的性质无法归结为 $\mathfrak{g}_r$ 的基底的表示 A_k 所对应的权的常系数线性组合，这给我们的研究带来了困难。$\mathfrak{g}_r$ 有无穷多个元素，如果其中任何一个元素生成的结构表示是不稳定的，当这个表示作用在量子体系上的时候就会导致量子体系的崩溃，这就是原子会发生自然裂变的数学基础。

第二十一章　量子参与的反应和过程以及有关的守恒定律

本章的讨论对涡子和量子同样适用，为了叙述简明起见，只举量子为例。所谓反应和过程指的都是量子体系从一个状态到另一个状态的改变，区别只是完成改变所需时间长短不同而已，所需时间短的改变是反应，持续时间长的改变是过程。按照定义，Ψ 是 M 上释放出的量子体系，$\{\Psi^i\}$ 可以支撑 M 的结构群 G 的一个表示。反之，如果任何一组基底 $\{\Psi^i\}$ 可以支撑 G 的一个表示，则可以认为 $\{\Psi^i\}$ 的一个线性组合 Ψ 是 M 上释放出的量子体系。这样一来，寻找新量子体系就变成寻找新的群表示。生成新表示的同时，原来的量子组合为新的基底，状态改变就是指新表示和新基底的生成。

定义 21-1：生成新表示的反应为量子反应。

如果作用在一个量子体系上的表示是可约的，则我们可以把这个量子体系中所有量子分为若干子空间，每一个子空间上各自作用着自己的不可约表示，由于不同的不可约表示代表向着不同方向的运动以及不同的运动轨线，于是整个量子体系自然分为若干独立的子量子体系。两个分别支撑不同的不可约表示的量子体系相遇时，如果没有生成新的不可约表示，则两个量子体系将在各自的不可约表示的作用下各奔东西。设想两个由不同量子数标记的量子体系 Ψ_1 和 Ψ_2，它们分别支撑结构群 G 的一个 n 维和 n' 维不可约表示，当它们相遇时可以以不同的方式生成新表示：

1. Ψ_1 和 Ψ_2 生成张量积是一个可逆的反应

$$(\Psi_1 \otimes \Psi_2) \Leftrightarrow \sum_j \oplus \Psi^j \qquad (21\text{-}1)$$

$\Psi_1 \otimes \Psi_2$ 是所谓的自然基底。一般情况下，自然基底是可约的，我们可以利用结构群 G 的 Clebsch-Gordon 系数将自然基底约化为不可约的人为基底，具体过程可以参见任何一本论述群表示的教科书。在物理上，如果自然基底 $\Psi_1 \otimes \Psi_2$ 是不可约的，自左至右的反应是量子体系的聚变反应；逆向的反应是量子体系的裂变反应。张量积可以推广到多个量子体系的情况，因此聚变可以是多个量子体系相遇的结果，裂变也可以产生多个量子体系。

2. Ψ_1 和 Ψ_2 生成张量和也是一个可逆的反应

$$\Psi_1 + \Psi_2 \Leftrightarrow (\Psi_1 \oplus \Psi_2) \tag{21-2}$$

显而易见，如果 $\Psi_1 \oplus \Psi_2$ 不能支撑 G 的一个新的不可约表示，那么 Ψ_1 和 Ψ_2 将在它们各自表示的作用下分道扬镳。从群表示论知道，可约群表示的表示空间必然可以分解为不可约子空间的直和。但是其逆命题不真，即，若表示空间 V 可以分解为子空间的直和，V 所支撑的群表示不一定必然可约。从上一章叙述的生成群的结构表示的方法可以断定，不管 V 是否可约，只要新表示是从 $\mathfrak{g}_r$ 的不可约表示生成的，新表示就是不可约的。因此当且仅当 $\mathfrak{g}_r$ 有 $n+n'$ 维不可约表示时，$\Psi_1 \oplus \Psi_2$ 可以支撑一个 $n+n'$ 维不可约群表示，$\Psi_1 \oplus \Psi_2$ 才会在新表示的作用下一起运动。$\mathfrak{g}_r$ 是否有 $n+n'$ 维不可约表示可以直接从 $\mathfrak{g}_r$ 的表示的维数公式判断出来。我们称这种生成新表示的反应为量子体系的化合，称其逆向反应为分解。张量和也可以推广到多个量子体系的情况，因此多个量子体系可以化合成分子，或者聚合成高分子。高分子和分子也可以分解为低分子或量子体系。

3. 不仅仅当量子体系相遇时会生成新表示，当一个不可约张量算子 $\Lambda = \{\Lambda_k, k = 1,2,\cdots,r\}$ 作用于量子体系 Ψ 上时也可以生成新的不可约表示。在这样的算子作用下，什么物理量的守恒定律成立是值得研究的问题。

4. 假设在单位元开域 U 上有矢量 $X = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ 和与 X 对偶的 1 形式 $\omega = b_k \mathrm{d}x^k = g(X)$ 满足

$$\langle u_*X, u^*\omega\rangle = \langle a^j \frac{\partial y^m}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial y^m}, b_k \frac{\partial x^k}{\partial y^n}\mathrm{d}y^n\rangle$$

$$= a^j \frac{\partial y^m}{\partial x^j} b_k \frac{\partial x^k}{\partial y^n}\delta^n_m = a^j \frac{\partial y^n}{\partial x^j}\frac{\partial x^k}{\partial y^n} b_k = a^k b_k = \langle X, \omega\rangle \quad (21\text{-}3)$$

必须指出，由于 X 和 ω 是在同一个开域上，而 u_* 是推前映射，u^* 是拖回映射，所以 u_*X 和 $u^*\omega$ 是位于不同开域上的量子流形。21-3 的物理意义是，不同点上的两个量子流形 u_*X 和 $u^*\omega$ 在运动中相遇在一点，如果在它们上面作用的群表示相互对偶，就会发生全微分对偶。这只有当 X 和 ω 在单位开域上满足

$$X = g(\omega) \quad (21\text{-}4)$$

时才会发生。全微分对偶就是正反物质湮灭。

量子体系相遇时可能发生上述四种反应生成新的量子体系，从而改变量子的统计分布。现在我们研究一下发生这四种反应时的守恒定律。最重要的守恒定律是能量守恒，量子不包含奇点，因此量子在上述四种反应中严格遵守能量守恒。

设有量子体系 Ψ_1 和 Ψ_2，它们的能量分别是 $E(\Psi_1)$ 和 $E(\Psi_2)$。当它们化合时，$\Psi_1 \oplus \Psi_2$ 作为一个整体在空间中运动，两个量子体系的动量张量的分量函数在空间发生重叠，而能量是分量函数的正定二次型，所以有三角不等式

$$E(\Psi_1) + E(\Psi_2) \geqslant E(\Psi_1 \oplus \Psi_2) \quad (21\text{-}5)$$

成立。根据能量守恒定律，反应前后的能量总值保持不变，21-5 说明化合反应会释放出能量，反之，分解反应则要吸收能量。

如果两个量子体系聚变，聚变后量子体系的能量可以大于，也可以小于或等于聚变前量子体系的能量。事实上，我们知道原子的裂变和聚变都可以释放出能量。

一个量子与反量子能量、质量相同，当发生正反物质湮灭的时候，能量全部被释放出来。

按照我们的定义，量子的质量密度是流形函数的平方，两个量子是两个不同的量子流形，它们的质量只与各自微分方程解出的流形函数有关，是分别定义的。只要反应的前后量子依然保持完整，它们的质量也就守恒。所以在化合或分解反应中质量守恒，而在聚变、裂变或湮灭反应中质量不守恒。

除了能量守恒以外，还有许多其他的守恒定律。当量子体系相遇时发生上述四种反应生成新的量子体系，这些守恒定律是否还成立必须逐一研究。设有两个量子体系相遇发生了化合反应，化合反应的真实过程是，u_1^* 把 Ψ_1 从某一点移动到 p 点，u_2^* 把 Ψ_2 从另一点移动到 p 点，反应产物 $\Psi_1 \oplus \Psi_2$ 则在 u^* 的作用下离开 p 点。分解反应则是化合反应的逆过程。

$$u_1^* \Psi_1 + u_2^* \Psi_2 \Leftrightarrow u^* (\Psi_1 \oplus \Psi_2) \tag{21-6}$$

如果我们研究的反应发生在一个封闭体系中，也就是说体系与其外部环境之间没有任何物理量的交换或迁移，从 21-6 可以看出，由于反应前后量子体系保持完整，任何线性物理量在化合或分解反应中守恒。

设想两个量子体系生成张量积 $\Psi_1 \otimes \Psi_2$，对调两个量子体系，则生成 $\Psi_2 \otimes \Psi_1$。如果两个量子体系 Ψ_1 和 Ψ_2 的所有量子数相同，由于量子的坐标不是物理量，我们就无法用实验区分这两个量子体系。因此我们无法断定生成的张量积是 $\Psi_1 \otimes \Psi_2$ 还是 $\Psi_2 \otimes \Psi_1$。事实上，对这两种情况我们都可以用 CG 系数得到相同的 CG 序列。既然不能断定生成的张量积是 $\Psi_1 \otimes \Psi_2$ 还是 $\Psi_2 \otimes \Psi_1$，我们假定两种情况发生的几率相同。把上述两式按它们发生的几率作算术平均

$$\frac{1}{2}(\Psi_1 \otimes \Psi_2 + \Psi_2 \otimes \Psi_1) \tag{21-7}$$

定义 21-2：设两个量子体系 Ψ_1 和 Ψ_2 所有量子数相同，如果

$$\Psi_1 \otimes \Psi_2 - \Psi_2 \otimes \Psi_1 = 0 \tag{21-8}$$

就说 Ψ_1 和 Ψ_2 是对称量子体系，如果

$$\Psi_1 \otimes \Psi_2 + \Psi_2 \otimes \Psi_1 = 0 \tag{21-9}$$

就说 Ψ_1 和 Ψ_2 是反对称量子体系。

一个有趣的现象是，当 Ψ_1 和 Ψ_2 是反对称量子体系时，21-7 式恒等于 0。对这个现象可以有两种解释：其一是，当两个量子数完全相同的反对称量子体系相遇时会发生类似湮灭的反应，反应的结果两个量子体系消失，量子体系的能量被全部释放出来；其二是，压根不存在，即，从来不曾生成两个量子数完全一样的反对称量子体系。无论那一种解释成立，其结果都导致

Pauli 选择定则 21-3：同一个能级上不能同时存在两个反对称量子体系；同一个能级上可以同时存在任意多个非反对称量子体系。

如果第一种解释成立，Pauli 选择定则是局部的。即，允许同一个能级上同时存在两个反对称量子体系，只要它们相距足够远；如果第二种解释成立，Pauli 选择定则是整体的。

寻找标量守恒定律就是寻找在结构群 G 变换下的不变量。除了 G 本身以外，G 的子群，特别是 G 的有限子群的不变量也是我们寻找的目标。例如，空间反演群

$$x^j = \pm x^j \tag{21-10}$$

是 G 的只有两个群元的子群，如果 M 上的量子 Ψ 具有关于空间反演的对称或反对称性，即

$$\Psi(x) = \Psi(-x) \quad 或 \quad -\Psi(x) = \Psi(-x) \tag{21-11}$$

从第一协变公理知道每个开域上的局部物理定律是一样的，因此直接可以判断这种对称或反对称性在每一个开域上将保持不变。用物理语言来描述就是宇称守恒。那么量子经过上述四种过程以后，宇称是否守恒呢？量子经过化合或分解反应后保持完整，因此宇称守恒；量子经过湮灭反应后完全消失，如果正反量子的宇称相反则宇称守

恒,如果正反量子的宇称相同则宇称不守恒。

定义 21-4:展开 Φ' 的 Schrödinger 特征解从一种态变为另一种态的过程为相变过程。

例如从液态变为气态。我们知道不同的正交多项式之间存在一些相等关系,例如 Sonine-Laguerre 多项式与广义 Hermite 多项式之间存在关系

$$L_n^{m-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(-1)^{-n}2^{-2n}}{n!}H_{2n}^m(\sqrt{x}) \tag{21-12}$$

21-12 就是液态与固态之间相变的数学基础。通常原子和分子是由多个量子组成的量子体系,这些量子之间存在相对运动。不同态的量子之间的相对运动可以是不同的,这使得不同态的量子在相对运动时其动量张量分量的重叠程度是不同的,所以相变过程发生的时候也会有能量的释放或吸收。除了能量和质量守恒以外,所有用线性物理算子作用于流形函数而定义的任何线性物理量在相变过程中守恒。注意到我们用于求 Schrödinger 方程特征解的多项式都是超几何函数或合流超几何函数的特例,因此这两种函数在求相变映射时是不可缺少的工具。

定义 21-5:力学过程是既不生成新的群表示又不生成新的态的过程。

在研究力学过程的时候,通常把我们研究的对象称作系统,一个系统是由大量量子体系组成的。为了方便起见可以把一个系统分割为若干子系统,有时候我们把其中一个子系统称作环境。既然量子体系和群表示在力学过程中保持不变,除了总能量和总质量守恒以外,所有用线性物理算子作用于流形函数而定义的线性物理量的总量在力学过程中守恒。所发生的物理现象仅限于物理量在子系统之间的迁移。例如,两个球发生碰撞以后动量在球之间的迁移;压缩气体使得气体中的原子之间由于动量张量分量函数的重叠程度增加而向环境释放能量。

第二十二章　量子统计

在第十四章中我们把 Ψ 和 Ξ 的能级叫做原始能级 ϵ_{lmN}，原始能级是量子数的函数。Ψ 和 Ξ 的行为截然不同，Ψ 的能量基本保持不变，Ξ 的能量随着 t 迅速趋于零。按照能量守恒定律，Ξ 把原始能量辐射到空间中去了。

按照能量守恒原理，从边界条件反演出来的物理量应该是能量守恒的，以湍流为例，设在无穷远处的一团流体的能量等于 E_∞，则当这团流体运动到边界 $\partial\Omega$ 附近时其能量仍然应该等于 E_∞。实际情况是，层流解中的流体团在 $\partial\Omega$ 附近的能量经常高于或低于 E_∞，这时从 $\partial\Omega$ 上释放出 Ψ 或 Ξ，使得在流体团上的能量守恒得以成立。一般来说，如果一个流体团上的能量相对于 E_∞ 的亏损值是 ΔE，就会有有限个量子聚集在该流体团上，使能量提高到 E_∞；反之，如果一个流体团上的能量相对于 E_∞ 的盈余值是 ΔE，就会有有限个涡子聚集在流体团上，使能量降低到 E_∞。量子和涡子从一个流体团运动到一个新的流体团的时候，或者流体团运动之后能量盈亏值发生变化的时候，将会发生第二十一章描述的反应和过程，以调整统计分布使之适应新的能量盈亏值。事实上，不但能量会发生盈亏，质量同样也会发生盈亏。由于质量正比于能量，在能量盈亏值被弥补的同时，质量的盈亏值也被弥补了，所以我们只需要对能量进行统计处理。以下的推导对涡子和量子同样成立，我们仅以量子为例。

对称性质不相同的量子具有不同的统计性质，我们称反对称量子为费米(Fermi)子，称非反对称量子为玻色(Bose)子。

定义 22-1：统计学意义下的系统是 R^m 上某个区域内的所有量子的集合。

定义 22-2：已知从基本方程解出的原始能级序列$\{\varepsilon_{lmN}\}$，设原始能级ε_{lmN}上分布有n_{lmN}个量子，称数列$\{n_{lmN}\}$为原始能级序列$\{\varepsilon_{lmN}\}$上的一个分布。每一个给定的分布确定系统的一个微观状态。

如果
$$\sum_{l,m,N} n_{lmN}\varepsilon_{lmN} = \Delta E \tag{22-1}$$
就称微观状态$\{n_{lmN}\}$是可实现的。

定义 22-3：若干原始能级组成一个简并能级ε_j。

我们可以用实验区分两个不同的简并能级，但是无法用实验区分一个简并能级所包含的任意两个原始能级。用于区别简并能级的特征物理量可以是能量、质量、电场强度、磁场强度等。类似地，设简并能级ε_j上分布有n_j个量子，称数列$\{n_j\}$为简并能级序列$\{\varepsilon_j\}$的一个简并状态。简并状态的定义取决于实验精度，给定实验精度，我们可以用实验区分两个不同的简并状态。但是无法用实验区分同一个简并状态所包含的任意两个微观状态。

对于一个给定的物理问题，原始能级可以从边界条件反演中得到，按照实验精度所能区分的最小能量间隔重组原始能级就得到简并能级$\{\varepsilon_j\}$，以及每个能级的简并度ω_j。具体做法是：根据实验手段的精度确定一个最小能量间隔$\Delta\varepsilon$，所有能量值落在同一个间隔中的原始能级组成一个简并能级ε_j，落在这个能量间隔中的原始能级的个数就是ω_j，取ε_j为ω_j个原始能级的能量平均值。从原始能级确定简并度ω_j是一件麻烦事，ω_j也是能量值的函数。

设简并能级ε_j上分布有n_j个量子，如果
$$\sum_j n_j\varepsilon_j = \Delta E \tag{22-2}$$
称$\{n_j\}$为简并能级序列$\{\varepsilon_j\}$的一个可实现简并状态。

这个定义有两个极端的情况：如果实验精度足以区分每一个原始能级，那么由于系统在任意瞬间t_0只能处在某一个可实现微观态$\{n_{lmN}\}$上，我们只需要连续追踪这个可实现微观态的改变就可以了，

$\{n_{lmN}\}$ 以及由 $\{n_{lmN}\}$ 引起的每一个可实现的微观态都是确实存在的，实现几率为 1，无须使用统计手段；如果实验精度不足以区分量子的任何能级上的特征物理量，那么唯一有意义的数就是能量盈亏值 ΔE，ΔE 的实现几率也是 1，同样无须使用统计手段。当实验精度介于上述两种极端情况之间时，我们就把原始能级组成简并能级，使用量子统计手段解决问题。$\Delta\epsilon$ 就是实验精度所能区分的能量最小值。

定义 22-4：若干简并状态的集合构成一个宏观状态。

定义 22-5：系统从一个宏观状态向另一个宏观状态的迁移叫做反应或过程。

例如，氢和氧化合成水的反应($2H_2 + O_2 = 2H_2O$) 中，氢就是一个简并态。更精密的实验表明，氢是由不同的同位素组成的，同一种氢同位素还可以有不同的电子能级，自旋等。这些同位素、能级、自旋都是更细分的简并态，氢则代表一个较粗略的简并态。两个简并态氢和氧组成系统的初始状态，水是终了状态。氢、氧化合成水就是反应。我们还可以用相同的术语来描述两个氘核聚变成一个氦核的反应，等等。

传统的量子统计中有所谓全同粒子不可分辨的说法[16]，不可分辨的粒子却具有可分辨的能级，这在物理上是自相矛盾的。按照我们的观点，之所以无法追踪一个原子，仅仅由于实验精度不允许。事实上，现在的实验手段已经非常接近直接观察原子了。问题是在传统的量子统计中，人们先验地假定存在某种叫做原子的粒子，然后把这些粒子分布在一个独立于原子的能级序列上。这样，在计算不同的分布方式时就产生了 Gibbs 佯谬。为了避开 Gibbs 佯谬，只好假定全同粒子不可分辨。实际情况是，不存在先验的粒子，所有的量子都是从基本方程和边界条件解出来的，量子的质量和量子的能量一样只是解出量子以后才有定义，给定一组量子数就唯一地决定了量子的能量和质量。换言之，我们面对的问题根本不是把一些先验存在的粒子分

布到给定的能级序列上去，而是把一个有限的能量盈亏值分解为与已知能级序列$\{\epsilon_{lmN}\}$对应的能量微观状态(22-1)，每一个微观状态都是物理问题的一个解，如果对调微观状态中的两个量子，也就同时对调了它们的质量、量子数和能级以及所有对应的物理量，对调的结果不产生新的解，也不产生新的微观状态。全同粒子不可分辨的说法只不过碰巧产生了相同的效果而已。

Ψ 或 Ξ 是完全独立的，换言之，一个由多个量子组成的系统的能量等于其中所有量子的能量的和。每一个能级都具有有限的能量，无限多个量子的系统只能具有无限大的能量，在物理上是不可能的，因此任何系统中的量子总数是一个有限值。但是量子总数并不是一个确定不变的数，第二十一章描述的反应和过程随时在调整量子的统计分布，也在改变量子的总数。理论上，任何一个小于能量盈亏值的能级上都有可能出现量子。于是我们的量子统计是这样的：首先计算给定区域上的能量盈亏值ΔE，如果ΔE是正值，就对Ξ进行统计，如果ΔE是负值，就对Ψ进行统计；然后根据对称性决定所采用的统计方法。即，对非反对称量子采用 Bose-Einstain(B-E) 统计，对反对称量子采用 Fermi-Dirac(F-D) 统计。具体的统计过程可以参考任何统计力学教科书，所不同的是我们对量子总数没有限制。下面把关键公式列出如下[16]：

给定分布$\{n_j\}$下的微观状态数：

$$\Omega_{BE} = \prod_j \frac{(n_j + \omega_j - 1)!}{n_j!(\omega_j - 1)!} \qquad \text{B-E} \tag{22-3}$$

$$\Omega_{FD} = \prod_j \frac{\omega_j!}{(\omega_j - n_j)!\,n_j!} \qquad \text{F-D} \tag{22-4}$$

应用 Stirling 公式以后，22-3 和 22-4 在 22-2 的约束下的最可几分布为

$$n_j = \frac{\omega_j - 1}{e^{-\beta\epsilon_j} - 1} \qquad B\text{-}E \tag{22-5}$$

$$n_j = \frac{\omega_j}{e^{-\beta\epsilon_j} + 1} \qquad \text{F-D} \tag{22-6}$$

其中的 Lagrange 乘子 β 可以用 22-2 式决定。

$$\sum_j \frac{\epsilon_j(\omega_j - 1)}{e^{-\beta\epsilon_j} - 1} = \Delta E \qquad \text{B-E} \tag{22-7}$$

$$\sum_j \frac{\epsilon_j\omega_j}{e^{-\beta\epsilon_j} + 1} = \Delta E \qquad \text{F-D} \tag{22-8}$$

22-7 和 22-8 不难用打靶法数值求解。要想求出解析解是不容易的，一般可以近似化为积分。

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon(\omega(\epsilon) - 1)}{e^{-\beta\epsilon} - 1} d\epsilon = \Delta E \qquad \text{B-E} \tag{22-9}$$

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon\omega(\epsilon)}{e^{-\beta\epsilon} + 1} d\epsilon = \Delta E \qquad \text{F-D} \tag{22-10}$$

命题 22-6：Lagrange 乘子 $\beta < 0$

证明：以 F-D 的公式 22-10 为例，

$$\begin{aligned}\frac{d(\Delta E)}{d\beta} &= \int_0^\infty \frac{-\epsilon^2\omega(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}}{(e^{-\beta\epsilon} + 1)^2} d\epsilon = \int_0^\infty -\frac{\epsilon^2\omega(\epsilon)}{\beta^2} d\left(\frac{1}{e^{-\beta\epsilon} + 1}\right) \\ &= -\frac{\epsilon^2\omega(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon} + 1)}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{2\epsilon\omega(\epsilon) + \epsilon^2\omega'(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon} + 1)} d\epsilon \\ &= \lim_{\epsilon \to \infty} \frac{-\epsilon^2\omega(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon} + 1)} + \frac{2\Delta E}{\beta^2} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^2\omega'(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon} + 1)} d\epsilon\end{aligned} \tag{22-11}$$

由于 ΔE 是有限的，所以 22-11 右端的极限和广义积分都必须是收敛的。式中 $\omega(\epsilon)$ 是简并度函数，是有界的。容易看出，当 $\beta \geqslant 0$ 时上述极限是发散的。令

$$\Delta E_1 = \int_0^\infty \frac{\epsilon^2\omega'(\epsilon)}{(e^{-\beta\epsilon} + 1)} d\epsilon \tag{22-12}$$

对 β 求导数后得到

$$\frac{\mathrm{d}\Delta E_1}{\mathrm{d}\beta} = \lim_{\epsilon\to\infty}\frac{-\epsilon^3\omega'(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon}+1)} + \frac{3\Delta E_1}{\beta^2} + \int_0^\infty \frac{\epsilon^3\omega''(\epsilon)}{\beta^2(e^{-\beta\epsilon}+1)}\mathrm{d}\epsilon \tag{22-13}$$

当 $\beta \geqslant 0$ 时，上式右端的极限也是发散的。这个过程可以一直进行下去，得到的结论是：$\beta < 0$ 时上述所有的极限都收敛到 0。对 B-E 公式可以进行类似的讨论。**证完**。

如果简并度 $\omega(\epsilon)$ 的微分，

$$\frac{\mathrm{d}^m\omega}{\mathrm{d}\epsilon^m} = 0 \tag{22-14}$$

则这个过程只有有限 m 步，我们可以从 ΔE_m 反推得到 $\Delta E = \Delta E(\beta)$。作为特殊情况，如果 $m = 1$，22-11 成为

$$\frac{\mathrm{d}\Delta E}{\mathrm{d}\beta} = \frac{2\Delta E}{\beta^2} \tag{22-15}$$

解得

$$\Delta E = e^{-\frac{2}{\beta}} \tag{22-16}$$

定义 22-7：统计物理量是系统中所有量子体系上某个物理量的平均值。

定义 22-8：绝对温度

$$T = -\frac{1}{k\beta} \quad T > 0 \tag{22-17}$$

其中 $k > 0$ 是 Boltzmann 常数。T 也唯一地决定了最可几分布，显然，T 是统计物理量。此时 22-5 和 22-6 成为

$$n_j = \frac{(\omega_j - 1)e^{\frac{-\epsilon_j}{kT}}}{1 - e^{\frac{-\epsilon_j}{kT}}} \quad \text{B-E} \tag{22-18}$$

$$n_j = \frac{\omega_j e^{\frac{-\epsilon_j}{kT}}}{1 + e^{\frac{-\epsilon_j}{kT}}} \quad \text{F-D} \tag{22-19}$$

如果 $\omega_j >> 1$，且 T 足够高，可以从 22-18 和 22-19 得到近似的 Boltzmann 分布

$$n_j = \omega_j e^{\frac{-\varepsilon}{kT}} \tag{22-20}$$

可见，只有温度较高，才能使能量值较大的能级上有量子分布。反之，能量值较大的能级上有量子分布意味着温度较高。

令 Ω 是某个宏观状态所包含的可实现微观状态数，Boltzmann 公式定义了熵

$$S = k\ \ln(\Omega) \tag{22-21}$$

按照统计学假设，系统停留在由原始能级定义的任何一个可实现微观态上的几率相同，这就是所谓等几率各态历经。但是系统停留在由简并能级定义的宏观状态上的几率是不同的，简并度越大，几率也越大。根据各态历经假设[16]，显然系统停留在某个宏观状态上的几率正比于该宏观状态包含的可实现微观状态数。给定绝对温度 T，在所有的宏观状态中，有一个宏观状态包含最大数目的可实现微观状态 Ω_{max}，这个宏观状态对应的分布就是最可几分布。我们称 Ω_{max} 对应的宏观状态为平衡态。设有两个宏观状态 A 和 B，它们所包含的可实现微观状态数分别为 Ω_A 和 Ω_B，且有 $\Omega_A < \Omega_B$，则系统停留在状态 B 的几率大于系统停留在状态 A 的几率。如果系统的初始状态为 A，系统将自动地从 A 向 B 迁移。显然，从 A 到 B 的过程是自动的，从 B 到 A 的过程是非自动的。注意到熵的定义 22-22，自动的过程是熵增加的过程，这就是热力学第二定律。必须指出，尽管热力学第二定律指明了过程自动进行的方向，实际过程并不一定发生。正如我们在热力学中所熟知的，具体物理过程能否发生还取决于一些诸如反应界面的大小之类的动力学因素。例如，常温下氢气和氧气并不化合成水；太阳上的氢并不会像氢弹一样爆炸。所以，我们通常看到的宏观状态并不一定是最可几分布。

从以上叙述中我们知道，之所以使用统计手段是因为存在简并

能级，之所以存在简并能级是因为我们的实验测量必定有误差 $\Delta\varepsilon$，而测量的对象又是连续物理量，这使得我们无法区分落在同一个 $\Delta\varepsilon$ 上的原始能级。假如我们能够设计一个直接测量量子数的物理实验，那么只需要不高的精度，如 0.1，我们就可以直接追踪原始能级。因为量子数只能取整数或半整数，0.1 的精度已经足以区别两个不同的量子数。

第二十三章　辐　射

在第十四章里我们定义了相变是Δ算子的特征形式从一种态到另一种态的改变，本章我们将研究一种特殊的相变，那就是辐射。本章的方法也适用于其他相变过程的求解。

特征方程

$$\Delta\Phi_{klm} = \lambda\Phi_{klm} \qquad \Phi_{klm} \in H^0(M) \tag{23-1}$$

的特征解可以表示为[10]

$$\Phi_{klm} = j_l(kr)P_m^l(\cos\theta)\begin{vmatrix}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{vmatrix} \tag{23-2}$$

一般地，M 上的任何0形式 Φ 不能展开为 Φ_{klm} 的级数，因为球Bessel函数在[0, ∞)上不是平方可积的。但是可以把 Φ 作Hankel变换，令

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\int_0^{\infty} A_{lm}(k)\Phi_{klm}k\,\mathrm{d}k \quad k \in [0, \infty) \tag{23-3}$$

$$A_{lm}(k) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\Phi \times j(kr)P_l^m(\cos\theta)$$

$$\times \begin{vmatrix}\cos(m\varphi)\\ \sin(m\varphi)\end{vmatrix} r^2\sin\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}\theta \tag{23-4}$$

这里 $A_{lm}(k)$ 是连续变量 k 的函数，只要23-4的积分收敛，23-3就成立。

既然 Φ_{klm} 满足23-1，我们可以从 Φ_{klm} 得到量子流形

$$\psi_{klm} = \Phi_{klm}\phi_k \tag{23-5}$$

所以从 M 上的任何0形式可以释放出量子流形 ψ_{klm}。

如果一般地有 Ψ 是 $\Psi_{\lambda lmN}$ 的线性组合，Ψ 满足

$$\Box\Psi = 0 \tag{23-6}$$

我们也可以用 Hankel 变换来展开 Ψ,

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\int_{0}^{\infty} A_{lm}(k)\psi_{klm}k\mathrm{d}k \quad k \in [0, \infty) \tag{23-7}$$

$$\begin{aligned} A_{lm}(k) = & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} \Psi \times j(kr)P_l^m(\cos\theta) \\ & \times \begin{vmatrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{vmatrix} \begin{vmatrix}\cos(kct) \\ \sin(kct)\end{vmatrix} r^2\sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{23-8}$$

定义 23-1：$A_{lm}(k)$ 是 Ψ 的热辐射谱。

显然，热辐射谱是连续谱。由于解 23-2 不是从 Schrödinger 方程的解得到的，它不要求以太具有任何特定的性质，所以 M 上的任何态的 0 形式都可以有热辐射(23-4)，许多量子构成的体系也可以有热辐射(23-8)。如果把黑洞解代入 23-4 得到的积分收敛，则黑洞也会有辐射。

从 M 释放出来的单个量子流形也可以有辐射谱，量子流形 $\Psi_{\lambda lmN}$ 满足

$$\Box\Psi_{\lambda lmN} = 0 \tag{23-9}$$

令

$$\Psi_{\lambda lmN} = \Phi_{ln}(r,\theta)\phi_m(\varphi)\phi_k(t) \tag{23-10}$$

23-9 可以分解为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_k}{\mathrm{d}t^2} + c^2\lambda\phi_k = 0 \tag{23-11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_m}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\phi_m = 0 \tag{23-12}$$

$$-\frac{\sin^2\theta}{\Phi_{ln}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi_{ln}}{\partial r}\right) - \frac{\sin\theta}{\Phi_{ln}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi_{ln}}{\partial\theta}\right) - \lambda r^2\sin^2\theta = -m^2 \tag{23-13}$$

23-11 的解为

$$\phi_k = \begin{vmatrix}\cos(kct) \\ \sin(kct)\end{vmatrix} \qquad \lambda = k^2 \tag{23-14}$$

23-12 的解为

$$\phi_m = \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \tag{23-15}$$

对于确定的 λ 和 m,23-13 是一个确定的微分方程,它的解可以有不同的态,例如采用球 Bessel 函数可以有

$$\Phi_{ln} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l j(kr) P_l^m(\cos\theta) \quad A_l \in R \tag{23-16}$$

采用气态解

$$\Phi_{lN} = P_l^m(\cos\theta) \sum_{n=0}^{N-1} A_n (\mu r)^{\frac{a-1}{2}} e^{-\frac{\mu r}{2}} L_n^a(\mu r)$$

$$A_n \in R \tag{23-17}$$

对于确定的 λ 和 m,23-13 的解是唯一的,所以

$$\Phi_{lN} = \Phi_{ln} \tag{23-18}$$

$$\Psi_{\lambda lmN} = P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(kct) \\ \sin(kct) \end{Bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} A_n (\mu r)^{\frac{a-1}{2}} e^{-\frac{\mu r}{2}} L_n^a(\mu r)$$

$$= \begin{Bmatrix} \cos(m\varphi) \\ \sin(m\varphi) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos(kct) \\ \sin(kct) \end{Bmatrix} \sum_{l=0}^{\infty} A_l j(kr) P_l^m(\cos\theta)$$

$$A_n, A_l \in R \tag{23-19}$$

或

$$\Psi_{\lambda lmN} = \sum_{l=0}^{\infty} A(l) \psi_{klm} \tag{23-20}$$

定义 23-2:$A(l)$ 就是量子 $\Psi_{\lambda lmN}$ 的光谱。

ψ_{klm} 中的常数k 是被$\Psi_{\lambda lmN}$ 中的常数k 所决定,显然 $A(l)$ 是离散的线状谱。

我们把 $\cos(m\varphi)$ 和 $\sin(m\varphi)$ 对应的展开系数 $A(l)$ 分别称为 $\Psi_{\lambda lmN}$ 的两个偏振谱,这里 $A(l)$ 是离散变量 l 的函数。定义光子 ψ_{klm} 是 $\Psi_{\lambda lmN}$ 的光辐射,当 l 在$[0, \infty)$上变化时,我们可以定义红外光、可见光直至 γ 射线。

涡子 Ξ 中与t 有关的项不是周期函数,涡子只能用 Hankel 变换

展开，辐射谱一定是连续谱而不是线状谱。对应的公式容易导出，不再赘述。

如果把光子看作是与气态、液态和固态并列的一种态，那么光辐射和热辐射都可以看作是相变。在量子凝聚过程中，多余的能量被辐射到空间中去了。

第二十四章 复流形

在第一章中我们曾经说过原则上可以用复数域

$$z^j = x^j + iy^j \qquad j = 1,2,\cdots,m \tag{24-1}$$

来构造流形 $Q(G,\phi)$，这里 i 是虚数单位。不失一般性，Q 的结构群 G 和局部微分方程 ϕ 都定义在复数域上。我们的兴趣主要集中在从已知的实可积流形释放出来的复流形。在本章中我们假定流形的局部微分方程子集的维数与结构群的维数相等。设 $Z = 0$ 是 Q 上的 $2m$ 维一阶线性偏微分方程，

$$Z = a^j(\boldsymbol{z})\frac{\partial}{\partial z^j} \tag{24-2}$$

我们同样可以用特征线方程

$$\frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t} = a^j(\boldsymbol{z}) \tag{24-3}$$

生成 $2m$ 维结构群

$$z^j = \phi^j(\boldsymbol{z}_0,\boldsymbol{\mu},t) \tag{24-4}$$

如果可以把 24-2 的实部和虚部分开写成

$$Z = X + iY \tag{24-5}$$

其中 $$X = b^j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{24-6}$$

$$Y = c^k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\frac{\partial}{\partial y^k} \quad j,k = 1,2,\cdots,m \tag{24-7}$$

则可以生成两个实单参数 Lie 子群

$$x^j = \varphi^j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\mu},t) \tag{24-8}$$

和 $$y^k = \psi^k(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{\mu},t) \tag{24-9}$$

及其表示

$$[\varphi_{\cdot}] = [\frac{\partial \varphi'(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\mu}, t)}{\partial x_0^k}] \tag{24-10}$$

和

$$[\psi_{\cdot}] = [\frac{\partial \psi'(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, \boldsymbol{\mu}, t)}{\partial y_0^k}] \tag{24-11}$$

按照我们的定义，两个不同的流形上的局部微分方程不等价，这样两个流形上的张量相加是没有意义的。但是，如果我们把这样两个流形上的局部物理定律分别当作一个复流形的局部微分方程的实部和虚部，一个复微分方程等于零等价于这个方程的实部和虚部分别等于零，因此合成的复微分方程等价于原来的两个实微分方程。例如，已知实流形 $M_1(G_1(\mathfrak{g}_1), X)$ 上的张量定律 $X(W_1) = 0$ 和 $M_2(G_2(\mathfrak{g}_2), Y)$ 上的张量定律 $Y(W_2) = 0$，X 与 Y 满足相同的基本方程，我们也可以尝试合成一个复流形 $Q: M_1 \otimes iM_2$，合成的局部复微分方程为 $Z(W_1 + iW_2) = X(W_1) + iY(W_2) = 0$，如果从 Z 可以生成一个与 G_1 和 G_2 不同构的结构群，我们就得到了一个新的流形 $Q(G(\mathfrak{g}), Z)$，尽管 X 和 Y 在原来的流形上都是可积的，但是 $Z(\boldsymbol{z}) = 0$ 一般地不能够积分得到流形函数

$$W(\boldsymbol{z}) = 0 \tag{24-12}$$

所以我们说 Q 不可积。在这里，不可积的意思是不能积分得到以 $\boldsymbol{z}$ 为变量的流形函数 24-12，尽管 X 和 Y 可以分别积分得到流形函数 W_1 和 W_2，但是 W_1 和 W_2 不满足 Cauchy-Riemann 方程。由于结构群不同构，Q 上的运动与 M_1 和 M_2 上的运动完全不同。按照我们的定义，结构群不同构意味着相互不可观测，不可观测的流形是无法研究的，因为我们不能够用实验来验证理论。因此我们希望 $\mathfrak{g}_1$ 或 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数，使得我们在 M_1 或 M_2 上至少能够部分地观测 Q 上发生的物理事件。

假设三维流形 M 的结构群是 G，已知 M 上的 1 形式 ω，作 Hodge 分解

$$\omega = \mathrm{d}\alpha + \delta\beta + \gamma \tag{24-13}$$

这里 α 是0形式，β 是2形式。

令
$$\pi = *\beta = a_j \mathrm{d}x^j \qquad \varphi = \alpha$$
$$j = 1,2,3 \tag{24-14}$$

则 φ 与 π 满足同样的基本方程

$$\delta\varphi = 0 \qquad \mathrm{d}\varphi = I \tag{24-15}$$

$$\delta\pi = 0 \qquad \mathrm{d}\pi = J \tag{24-16}$$

我们把它们合成 m 维复流形 $Q = M \oplus iM$ 上的局部物理定律

$$\eta \doteq \pi + ic\varphi \wedge \mathrm{d}t \qquad c \in R \tag{24-17}$$

$\mathrm{d}t$ 是弧长时间，c 就是在第十九章里定义弧长时间的时候引入的常数。

令
$$x^4 = ict \tag{24-18}$$

$$\eta = \pi + \varphi \wedge \mathrm{d}x^4 \tag{24-19}$$

η 满足方程

$$\delta\eta = 0 \qquad \mathrm{d}\eta = I + iJ \tag{24-20}$$

等价地

$$\Delta_d \eta = 0 \quad \Delta_\delta \eta = K \quad K = \delta(I + iJ) \tag{24-21}$$

粗看上去

$$\eta = \pi + \varphi \wedge \mathrm{d}t \tag{24-22}$$

似乎也可以合成一个不可积流形上的局部物理定律。事实上，尽管24-22中的 η、π 和 φ 满足相同的基本方程，合成的 η 与 π 和 φ 没有任何等价关系，因此是毫不相关的，这样合成得到的流形与原来的物理问题没有联系，这不是我们所希望的。在24-17中我们把两个张量合成为一个新的局部物理定律，我们还需要使合成的新张量能够生成与原来的结构群不同构的结构群，如果合成的1形式 η 作为 G 连通的微分方程子集有与原来的微分方程子集不同的维数，我们就可能采用新的Lie代数来生成速度空间 $\mathfrak{g}(Q)$。最容易想到的能够增加 G 连通微分方程子集的维数的变量莫过于弧长时间 t，令

$$\pi = a_j \mathrm{d}x^j + ic \times 0\mathrm{d}t \qquad j = 1,2,3 \tag{24-23}$$

$$\psi = 0\mathrm{d}x^1 + 0\mathrm{d}x^2 + 0\mathrm{d}x^3 + ic\varphi\mathrm{d}t \tag{24-24}$$

显然，$\eta = \pi + \psi$ 就是前面已经定义了的 η，此时 G 连通微分方程子集的维数已经变成了 4。为了能够采用新的 Lie 代数来生成速度空间，定义代表流形 $N = O \oplus iO$ 和流形 $Q = M \oplus iM$ 上的自然基底分别是

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \frac{\partial}{\partial y^3}, \frac{\partial}{ic\partial t}\right\}$$

和
$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{ic\partial t}\right\} \tag{24-25}$$

定义 24-1：Q 上的不变算子

$$\bar{\mathrm{d}} = \mathrm{d} + \frac{\partial}{\partial t} \wedge \mathrm{d}t = \mathrm{d} + \frac{\partial}{\partial x^4} \wedge \mathrm{d}x^4 \tag{24-26}$$

显然
$$\bar{\mathrm{d}}\pi = \mathrm{d}\pi \qquad \bar{\mathrm{d}}\psi = \mathrm{d}\psi \tag{24-27}$$

$$\bar{*}\,\pi = *\,\pi \qquad \bar{*}\,\psi = *\,\psi \tag{24-28}$$

所以有

$$\bar{\delta}\,\pi = \delta\pi \qquad \bar{\delta}\,\psi = \delta\psi \tag{24-29}$$

定义 24-2：

$$\Delta = \bar{\mathrm{d}}\bar{\delta} + \bar{\delta}\,\bar{\mathrm{d}} \qquad 24-30$$

$$\Delta_{\bar{\mathrm{d}}} = \bar{\mathrm{d}}\bar{\delta} \qquad \Delta_{\bar{\delta}} = \bar{\delta}\,\bar{\mathrm{d}} \tag{24-31}$$

注意到 η 的任何一个分量都与弧长时间 t 无关，η 实际上仍然是 M 上的张量，但是 η 在 4 维结构群的作用下，所有分量都将与 t 有关，可见 η 只是一个 Cauchy 问题的初始条件而已。我们令 Ξ 为以 η 为初始条件的 1 形式，也就是说 Ξ 是从 M 上释放出来的流形，

$$\Xi|_{t=0} = \eta \tag{24-32}$$

这里
$$\Xi = \Xi(\boldsymbol{x}, t) \tag{24-33}$$

既然 Ξ 是一个 Cauchy 问题的解，我们假定 Ξ 与 Q 上的边界条件无

关，这样 Ξ 是可以自由运动的。Ξ 应该满足

$$\Delta\Xi = 0 \tag{24-34}$$

令

$$\Psi = \Xi - \eta \tag{24-35}$$

则有

$$\Delta\Psi = -\eta \tag{24-36}$$

$$\Xi\big|_{t=0} = 0 \tag{24-37}$$

用算子 $\bar{\delta}$ 作用于 24-36 的两端，注意到 24-20，我们有

$$\bar{\delta}\,\Delta\Psi = (\bar{d}\bar{\delta} + \bar{\delta}\,\bar{d})\bar{\delta}\,\Psi = 0 \tag{24-38}$$

两面用 $\bar{\delta}\,\Psi$ 做 Poincaré 对偶，得

$$\langle(\bar{d}\bar{\delta} + \bar{\delta}\,\bar{d})\bar{\delta}\,\Psi, \bar{\delta}\,\Psi\rangle = \langle\bar{d}\bar{\delta}\,\Psi, \bar{d}\bar{\delta}\,\Psi\rangle = 0 \tag{24-39}$$

$$\bar{d}\bar{\delta}\,\Psi = 0 \tag{24-40}$$

再用 Ψ 对上式两端作 Poincaré 对偶，

$$\langle\bar{d}\bar{\delta}\,\Psi, \Psi\rangle = \langle\bar{\delta}\,\Psi, \bar{\delta}\,\Psi\rangle = 0 \tag{24-41}$$

所以

$$\bar{\delta}\,\Psi = 0 \tag{24-42}$$

由此可知 Ψ 满足基本方程

$$\bar{\delta}\,\Psi = 0 \tag{24-43}$$

$$\bar{d}\Psi = -K \tag{24-44}$$

等价地有

$$\Delta_{\bar{d}}\Psi = 0 \tag{24-45}$$

$$\Delta_{\bar{\delta}}\Psi = \Delta\Psi = -\eta \tag{24-46}$$

$$\Psi\big|_{t=0} = 0 \tag{24-47}$$

其中

$$\eta = \bar{\delta}\,K = \pi + \psi = e_a \mathrm{d}x^a \tag{24-48}$$

24-45 和 24-46 就是 Q 上的基本方程，24-47 是初始条件。令

$$\Psi = \Psi(x, t) = a_j \mathrm{d}x^j + \varphi \mathrm{d}x^4 = a_a \mathrm{d}x^a \tag{24-49}$$

$$a_4 = \varphi \qquad j = 1,2,3 \qquad \alpha = 1,2,3,4 \tag{24-50}$$

解 Ψ 的所有分量都是 x 和 t 的函数。24-49 的特征线为

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}\tau} = a_j \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = ic\varphi \tag{24-51}$$

从 24-51 可以很容易生成单参数子群及其表示。

$$\text{设} \quad A(\tau) = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x^1} & \frac{\partial a_1}{\partial x^2} & \frac{\partial a_1}{\partial x^3} & \frac{\partial a_1}{ic\partial t} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x^1} & \frac{\partial a_2}{\partial x^2} & \frac{\partial a_2}{\partial x^3} & \frac{\partial a_2}{ic\partial t} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x^1} & \frac{\partial a_3}{\partial x^2} & \frac{\partial a_3}{\partial x^3} & \frac{\partial a_3}{ic\partial t} \\ \frac{\partial(ic\varphi)}{\partial x^1} & \frac{\partial(ic\varphi)}{\partial x^2} & \frac{\partial(ic\varphi)}{\partial x^3} & \frac{\partial\varphi}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{24-52}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^1}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^1}{\partial x_0^3} & \frac{\partial x^1}{ic\partial t} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^2}{\partial x_0^3} & \frac{\partial x^2}{ic\partial t} \\ \frac{\partial x^3}{\partial x_0^1} & \frac{\partial x^3}{\partial x_0^2} & \frac{\partial x^3}{\partial x_0^3} & \frac{\partial x^3}{ic\partial t} \\ \frac{\partial(ict)}{\partial x_0^1} & \frac{\partial(ict)}{\partial x_0^2} & \frac{\partial(ict)}{\partial x_0^3} & \frac{\partial t}{\partial t_0} \end{bmatrix} \tag{24-53}$$

微分 24-51 可得

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}\tau} = A(\tau)\Lambda \tag{24-54}$$

4×4 矩阵 Λ 有一个非常特别的性质，那就是 $\Lambda_{jk}\ j,k=1,2,3$ 和 Λ_{44} 是实函数，Λ 其余的元素是纯虚函数。而且矩阵的逆和乘积仍然保持这个性质不变，我们称这样的性质为 Lorentz 性质，这样的矩阵构成的矩阵群就是 Lorentz 群。1 形式 Ψ 的定义式 24-49 也有一个特殊的性质，那就是，有的分量是坐标的实函数，有的分量是坐标的纯虚函数，而且这个性质在 Lorentz 群的作用下保持不变。不仅 1 形式，任何

阶张量也可以具有这种性质，我们称所有具有这种性质的张量为 Lorentz 张量，而且在任何张量运算下，从 Lorentz 张量仍然得到 Lorentz 张量。

定义 24-3：

$$E_{\alpha\beta}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\\\text{第 }\alpha\text{ 行}\\\\\\\end{matrix}\qquad(\text{第 }\beta\text{ 列})\tag{24-55}$$

$$\alpha,\beta=1,2,3,4$$

令

$$J_{jk}=E_{jk}-E_{kj}\tag{24-56}$$

$$I_{4k}=E_{4k}-E_{k4}\qquad j,k=1,2,3\tag{24-57}$$

则 J_{jk} 和 I_{jk} 分别构成封闭的线性空间，而且有对易子运算

$$[J_{ij},J_{kl}]=\delta_{il}J_{jk}+\delta_{jk}J_{il}-\delta_{ik}J_{jl}-\delta_{jl}J_{ik}\tag{24-58}$$

$$[I_{4j},J_{k4}]=\delta_{44}I_{jk}+\delta_{jk}I_{44}-\delta_{4k}I_{j4}-\delta_{j4}I_{4k}\tag{24-59}$$

$$[J_{jk},I_{4i}]=0\tag{24-60}$$

令

$$J_1=J_{12}\quad J_2=J_{13}\quad J_3=J_{23}$$

$$M_1=I_{41}\quad M_2=I_{42}\quad M_3=I_{43}\tag{24-61}$$

J_k 和 M_m 都是 4×4 矩阵，J_k 的非零元素分布在左上角的 3×3 子阵上，而 M_m 的非零元素分布在第 4 行和第四列上。J_k 和 M_k 满足对易关系

$$[J_j,J_k]=C^i_{jk}J_i\qquad i,j,k=1,2,3\tag{24-62}$$

$$[M_m,M_n]=C^l_{mn}M_l\qquad m,n,l=4,5,6\tag{24-63}$$

$$[J_k,M_m]=0\tag{24-64}$$

令

$$Y_k=[J_k]^\alpha_\beta y^\beta\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\tag{24-65}$$

$$Y_m = [M_m]^\alpha_\beta y^\beta \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{24-66}$$

则 $Y_k \oplus Y_m$ span $\mathfrak{g}(O \oplus iO)$，而且 Y_k 和 Y_m 都是 Lorentz 张量，满足对易关系

$$[Y_j, Y_k] = C^i_{jk} Y_i \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{24-67}$$

$$[Y_m, Y_n] = C^l_{mn} Y_l \qquad m,n,l = 4,5,6 \tag{24-68}$$

$$[Y_k, Y_n] = 0 \tag{24-69}$$

$\mathfrak{g}(O)$ 和 $i\mathfrak{g}(O)$ 都是三维的，我们知道三维的单 Lie 代数只有 A_1，因此 $\mathfrak{g}(O)$ 和 $i\mathfrak{g}(O)$ 是$\mathfrak{g}(O \oplus iO)$ 的子代数，Q 在M 上是可以观测的，而且$\mathfrak{g}(O \oplus iO)$ 与$\mathfrak{g}(O)$ 不同构，因此 $N: O \oplus iO$ 是一个新的流形。按照第十章给出的方法，代表流形上所有几何性质都是可以求出的：任意取 $\mathfrak{g}^*(O \oplus iO)$ 上的一个微分 1 形式 θ，指定定向 $\theta \to \eta$，分别求出 θ 和 $\eta \in \mathfrak{g}^*(M \oplus iM)$ 所对应的单参数子群及其酉表示，进而求出等距微分同胚 $F: O \oplus iO \to M \oplus iM$，映射生成 $X_k \oplus X_m$ span $\mathfrak{g}(M \oplus iM)$

$$[X_j, X_k] = C^i_{jk} X_i \qquad i,j,k = 1,2,3 \tag{24-70}$$

$$[X_m, X_n] = C^l_{mn} X_l \qquad m,n,l = 4,5,6 \tag{24-71}$$

这样，流形 Q 上所有几何性质也可以求出。

为了使坐标变换后得到的张量仍然是 Lorentz 张量，流形 Q 上的坐标变换必须分别对 Lorentz 张量的实部和虚部进行，称这样的坐标变换为 Lorentz 坐标变换。

$$\mathrm{d}x'^k = [A]^k_j \mathrm{d}x^j \qquad j,k = 1,2,3,4 \tag{24-72}$$

$$A = \begin{bmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 & 0 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^4_4 \end{bmatrix} \tag{24-73}$$

设 A 是可积的，积分为

$$x'^j = f^j(x^1, x^2, x^3) \tag{24-74}$$

$$t' = f^4(t) \qquad j = 1,2,3 \tag{24-75}$$

在任何坐标下，我们可以按照矢量微分中的惯例把 24-49 中的 Ψ 表示为

$$\boldsymbol{A} = (a_1, a_2, a_3) \quad \varphi = a_4 \tag{24-76}$$

24-43 可以写为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{24-77}$$

这就是 Lorentz 规范。定义

$$\boldsymbol{j} = (e_1, e_2, e_3) \quad \rho = e_4 \tag{24-78}$$

注意到 Lorentz 坐标变换分别作用于 Ψ 的时间部分和空间部分，则 24-46 可以写为

$$\Box \boldsymbol{A} = \Delta_\delta \boldsymbol{A} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{c^2 \partial t^2} = -j \tag{24-79}$$

$$\Box \varphi = \Delta_\delta \varphi + \frac{\partial^2 \varphi}{c^2 \partial t^2} = -\rho \tag{24-80}$$

这里的 24-79 和 24-80 分别是矢量和标量形式的波动方程。如果上述两式的右端项为零，就得到无源的波动方程

$$\Box \boldsymbol{A} = 0 \tag{24-81}$$

和

$$\Box \varphi = 0 \tag{24-82}$$

按照微分方程的理论，24-81 和 24-82 的通解加上 24-79 和 24-80 的一个特解就得到 24-79 和 24-80 的通解。

对 Ψ 作外微分

$$\bar{\mathrm{d}}\Psi = \left(\frac{\partial a_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial a_\beta}{\partial x^\alpha}\right)\mathrm{d}x^\alpha \mathrm{d}x^\beta \quad \alpha, \beta = 1,2,3,4 \tag{24-83}$$

令 $\omega = F_{\alpha\beta}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\beta = \bar{\mathrm{d}}\Psi = H_{jk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k + E_i \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^4$

$$i, j, k = 1,2,3 \tag{24-84}$$

为电磁场张量，显然电磁场张量满足

$$\bar{\delta}\omega = -\eta \tag{24-85}$$

$$\bar{\mathrm{d}}\omega = 0 \tag{24-86}$$

采用矢量记法，定义磁感应强度和电场强度为

$$\boldsymbol{H} = (H_{12}, H_{23}, H_{31}) \tag{24-87}$$

$$\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3) \tag{24-88}$$

电流矢量和静电荷为

$$\boldsymbol{j} = (e_1, e_2, e_3) \quad \rho = e_4 \tag{24-89}$$

24-85 等价于

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = -\rho \tag{24-90}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = -\boldsymbol{j} \tag{24-91}$$

24-86 等价于

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0 \tag{24-92}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \tag{24-93}$$

24-90 至 24-93 就是矢量形式的 Maxwell 电磁场方程，24-93 说明随时间变化的磁场会产生电场，反之亦然，这就是 Faraday 电磁感应定律。公式 24-20 的矢量形式为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{24-94}$$

这就是电量守恒定律。

从本章的叙述可以推知，任何流形上的物理量自然伴随有电场和磁场，这可以解释为什么雷雨之中会产生雷电。

第二十五章　在物理学上的应用

现在，物理上的许多实验定律都可以从理论上直接推导出来，下面我们仅作一点初步的工作。

能量、质量、电荷守恒定律：按照定义，能量密度、质量密度和电荷密度都是流形上的 m 形式，根据命题 9-4 和第十九章中的定义直接可以得到能量守恒、质量守恒和电荷守恒。注意到黑洞解的中心和绕流边界上能够不断产生质量，能量和电荷，守恒定律在奇点和边界上不成立。

质量能量公式：对于任意可定向流形 M，设 Φ 是 M 上的流形函数，ω 是 M 上的 1 形式，

$$m = \int_M \rho \mathrm{d}v = \int_M \Phi \wedge * \Phi \tag{25-1}$$

$$E = \int_M e \mathrm{d}v = \int_M \omega \wedge * \omega \tag{25-2}$$

我们知道 $\mathfrak{g}^*(M)$ 上任意两个非零 m 形式成正比[7]，而且比例系数大于零，所以

$$E = c^2 m \qquad c \in R \tag{25-3}$$

在能量与电量和质量与电量（如果电量值非零）之间也存在类似关系。

关于测不准原理：按照我们的定义，任何物理量都是可以准确测量的；任何非物理量都是测不准的。处在不同物理世界的观测者不能观测到对方世界的物理量，这也可以称之为测不准。如果不同构的流形 M 和 N 都是可积的，则 M 的质量在 N 上的观测者看来就是暗物质，反之亦然。

关于统计平衡态：或许读者会感到奇怪，为什么我们在第二十二

章中并没有定义平衡态?事实上,所谓等几率各态历经就是一种平衡态假设,这个假设认定任何一个可实现微观状态的实现几率相同。其实我们完全可以采用其他平衡态假设,例如我们在大部分湍流实验中观察到巨大涡子很少产生,可以假设包含巨大涡子的可实现微观态具有较低的实现几率。相反,在另外一些湍流实验,例如卡门涡街中,巨大涡子一个接一个地不断产生,我们必须假定包含这种巨大涡子的可实现微观态具有较高的实现几率。理论上,有了平衡态假设,第二十二章的量子统计就可以进行。如果系统不遵循任何平衡态假设,那么系统就处于非平衡态。一个统计物理量是系统中所有量子体系上该物理量的平均值,如果系统没有达到平衡态,这个平均值是不稳定的,是时间的随机函数,按照我们在第一章中关于可观测性的论述,随机的统计平均值是不可观测的,对我们没有任何意义。

热力学第二定律:见第二十二章。

关于冷聚变:即便系统已经处于平衡态,我们也可以通过改变一些参数来移动平衡,使有用的过程得以进行。例如人们殚精竭虑地想通过把绝对温度提高到数千万度,使氘聚变为氦以获取能量。其实,改变温度并不是唯一可以影响平衡的办法。改变温度的目的只是为了使其中某些氘核具有很高的平动能量,从而改变了统计分布。如果在系统中加入量子数很大的原子同样可以改变分布,使平衡移动,例如,在托卡马克装置的氢等离子体中加入少量的铀原子,应该可以使热核反应发生的开始温度降低一些。量子数更大的原子无法大量制造,其半衰期也太短,很难真正影响聚变过程。一个异想天开的想法是:既然在数学上原子和湍流产生的涡子是相同的东西,能否用湍流涡子来影响原子的平衡态呢?从理论上讲,只要原子的能级序列与某一个具有足够高能量的湍流涡子正交,而且这种湍流涡子具有足够长的半衰期、可以连续地大量产生,原子的统计平衡就可以被湍流涡子移动。这就是冷聚变。

关于"宇宙热死":热力学第二定律指出了过程进行的方向必然

是从绝对温度较高的分布指向绝对温度较低的分布，最终达到平衡。Clausius 据此作出了整个宇宙将会“热死”的推断。这个推断在逻辑上并不是无懈可击的，因为它需要一个必不可少的前提：宇宙中所有流形都遵守能量守恒，都不会有能量产生，更不会自动生成绝对温度较高的分布。考察我们在第十五章得到的绕流解，在边界 $\partial\Omega$ 上会不断产生量子数很大的涡子，换句话说，$\partial\Omega$ 上会不断产生绝对温度很高的分布。这样，温度平衡就永远也不会达到。但是，这仍不足以驳倒“热死”论，因为绕流解的边界 $\partial\Omega$ 的运动状态是以某种外界能量来维持的。例如，向平静的水中投掷一个石块，石块在水中前进时不断释放出涡子，同时消耗本身的动能直至停止。如果把石块的动能包括在系统内，整个系统仍然保持能量守恒，仍然会“热死”。幸好除了绕流解以外我们还有两类黑洞解（第十六章），黑洞解与任何边界无关，它自由地漂浮在空间中，也会不断产生量子数很大的涡子，而且在奇点上不受能量守恒的约束。因此，宇宙是不会“热死”的。

热力学第三定律：从22-18和22-19容易看出，$T=0$ 时 $n_j=0$，$\Delta E=0$，也就无须统计了。事实上，当 T 小到某个程度，任何宏观状态所包含的可实现微观态都是屈指可数的，这破坏了概率论中大数定理成立的前提，统计手段已经不能使用了，此时唯一的办法是直接追踪由原始能级定义的微观状态。可见绝对温度是不能等于零的，这就是热力学第三定律的物理本质。此外，由于 β 不等于零，绝对温度 T 还必须是一个有限的数值。

关于质量的凝聚：按照常微分方程稳定性理论，对给定的 x_0 和 μ，6-56 和 6-79 代表相轨线。定义质量以后，当 $t\to\infty$ 时，从相轨线的走向可以决定质量的聚散。处于渐近稳定域内的相轨线将汇聚到一起。如果渐近稳定域内有一个平衡点，相轨线将向这一点汇聚，质量凝聚形成恒星、行星、卫星或质子、电子。如果渐近稳定域内有一条奇异闭轨线，相轨线将汇聚成一个极限圈，形成土星、木星、天王星光环或小行星带；处于不稳定域内的相轨线将互相远离，如同蟹状星云

一样发生爆炸后物质被抛出；处于稳定但非渐近稳定域内的相轨线将既不汇聚也不远离，形成较为稳定的星云，这或许就是彗星；如果在稳定但非渐进稳定域内的质量密度较高，就可以形成变星。由此可以推断，地球与太阳系内任何质量较大的小行星都不可能发生碰撞，因为当初它们之所以凝聚成不同的星体就是因为它们处在不同的渐近稳定域内，它们的相轨线在有限时间内决不会相交。可见，研究解6-56和6-79的稳定性和渐近稳定性是非常重要的。如果取平衡点为坐标原点，建立一个相对坐标，凝聚之前的质量相对于坐标原点快速运动，而凝聚之后质量块相对于坐标原点趋于静止，根据能量守恒原理，动能将变为热能释放出来，所以凝聚过程伴随温度变化。除此之外，当恒星从奇点处生成的时候，奇点附近的统计温度是非常高的，温度高到一定程度，正在凝聚的质量块成为粘稠的液态。如果在这个时候有一颗陨石击中该质量块，而且在该陨石引起的液态质量的运动停止之前整个质量块迅速冷却了，陨石击中的地方就会形成一座环形山，从一滴水落入水面的慢镜头我们可以类推得知环形山的中央还可能会有一个突兀的山峰。

关于黑洞：所谓恒星引力坍缩形成黑洞的说法是不成立的。道理很简单：在 Ψ 或 Ξ 形成的初期，质量是空间坐标的可微函数，因此质量呈弥漫星云状分布。从常微分方程组的稳定性理论我们知道：随着弧长时间的增加，除了不稳定区域的质量被抛出，以及稳定但非渐近稳定区域的质量继续保持弥漫星云状分布外，渐近稳定区域的质量趋向一点而形成黑洞需要无穷大的时间，因而是不可能的。引力坍缩理论的错误在于它假设Newton万有引力定律在任何情况下成立，事实上，在一定条件下无论是恒星系还是原子都会发生相变，例如从气态变为固态。此时 Newton 引力定律不再成立，代之成立的是 Hooke 定律，质量的凝聚变得非常缓慢。因此，黑洞只能是第十六章给出的黑洞解。第一类黑洞解在黑洞中心的奇点以外的地方是调和的，按照我们给电场和磁场下的定义，调和解在解析域上既没有电场也没有

磁场。但是第一类黑洞有一个力场，这只要在解析域上对 $d\Theta$ 求协变导数就可得到。第二类黑洞可以既有力场又有磁场或电场。

关于哈勃红移：无论是在绕流解还是在黑洞解里，量子和涡子在群表示的作用下不断被剥离出来，但是黑洞的奇点或绕流解的 $\partial\Omega$ 附近的能量盈亏值是一定的，源源不断新产生的量子和涡子超过了满足能量守恒所必须的数量，于是量子和涡子以随机运动的形式扩散，互相远离，从而产生哈勃观测到的红移。

关于相变：在第十四章中求解 Δ 算子的特征方程时仅仅引用了气液固三种态的解。我们知道在 R^3 中可能得到的量子的态是非常多的。可以肯定，超导、超流动是不同的态，冶金学里的奥氏体和马氏体也是不同的态，记忆合金恢复记忆是相变。显然，研究不同的态之间的相变映射及其发生的条件具有巨大的经济意义，因为它会带给我们大量的新材料。必须指出，本书提出的理论并不限于流体，对固体或其他任何态上发生的物理过程都成立。

关于地球的凝聚：地球是太阳系的一颗行星，如果太阳系从生成到现在从未经历过蜕变或聚变，那么，凝聚后的地球应该是一个整体。这种可能性一般是不存在的。事实上太阳系必然经历过多次蜕变或聚变，则地球是由曾属于不同原始恒星系的质量块组成，这些质量块的相轨线会略有不同，因此块与块之间会有相对运动，我们在地球的表面观测到不同的板块就是由于这个原因。相对靠近、啮合挤压的块边界上，地壳熔化、火山喷发、造山运动；相对远离的块边界上，地壳崩塌，发生地震。地震发生的原因是质量块相对远离太快，超过地壳在自重下塑性变形的能力。假如我们能够测算出地球每一点的相轨线，将不同的质量块区分开，就可以预报地震。如果火山喷发不能作为地心是由炽热岩浆构成的根据，或许有理由认为地心可能是凉的。Jules Verne 在他的引人入胜的科学幻想小说《地心游记》中曾做过类似地阐述。

Newton 第一定律：第六章的讨论使我们知道，欧氏空间 R^m 作为

一个平坦流形它的 Lie 代数是 Abel 的，G 的结构常数 $C^i_{jk} \equiv 0$，$\Gamma^i_{jk} \equiv 0$，因此 R^m 上的力恒为 0。R^m 的切空间由 $\frac{\partial}{\partial x^j}$ 张成，

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right] = 0 \tag{25-4}$$

$\mathfrak{g}(R^m)$ 上的任何矢量 X 可以写为

$$X = \alpha^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \alpha^j \in R \tag{25-5}$$

$X(f) = 0$ 的特征线方程为

$$\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \alpha^j \tag{25-6}$$

这个公式表明运动是匀速的。积分可得

$$x^j = \alpha^j t + x^j_0 \qquad j = 1, 2, \cdots, m \tag{25-7}$$

这是 R^m 中的直线。于是我们得到结论：没有力作用的运动是匀速直线运动。这正是 Newton 第一定律。而且任何与 R^m 同构的流形的速度空间 $\mathfrak{g}(N)$ 的对易子必然为零，N 与 R^m 之间的映射是线性的，

$$y^j = A^j_k x^k \qquad A^j_k \in R \tag{25-8}$$

这里 y^j 是 N 上的局部坐标。

Newton 第二定律：众所周知，物理过程通常发生在一个弯曲的流形上，这给物理问题的求解带来极大的困难。本书提出的理论在求一个具体物理问题的全部解析解时也是非常繁复的。历史上，许多数学家和物理学家都曾致力于把一个弯曲流形上的物理问题化为一个等价的欧氏空间中的物理问题。数学家们的思路是寻找一个映射，将一个弯曲流形 M^m 嵌入到一个欧氏空间 R^n 中去（$n \geqslant m$）。这样的思路迄今并未对任意物理问题找到一个有效的求解方法。相比之下，物理学家们的思路较为实用有效，其主要代表就是 Newton 第二定律。

令
$$Z = \rho Y = \rho v^k \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{25-9}$$

我们有
$$L_Z Z = [Z, Z] = 0 \tag{25-10}$$

任何 $Z \in T(M)$ 可以生成单参数子群 φ_t，对于可积流形容易推出

$$[\varphi_t]^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}([\varphi_t]\rho v^k) = \frac{\mathrm{d}(\rho v^k)}{\mathrm{d}t} + [\varphi_t]^{-1}\frac{\mathrm{d}[\varphi_t]}{\mathrm{d}t}\rho v^k = 0 \tag{25-11}$$

这里 φ_t 是由

$$\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \rho v^i \tag{25-12}$$

生成的单参数子群。如果 ρ 是质量密度，$Y \in \mathfrak{g}(M)$，定义

$$F^k = -[\varphi_t]^{-1}\frac{\mathrm{d}[\varphi_t]}{\mathrm{d}t}\rho v^k \tag{25-13}$$

为力，就得到 Newton 第二定律

$$\frac{\mathrm{d}(\rho v^k)}{\mathrm{d}t} = F^k \tag{25-14}$$

值得指出的是Newton第二定律对协变或逆变基底，对弯曲或是平坦的流形都成立。注意到命题9-4，Newton第二定律对流形上的任意阶张量成立。如果流形是不可积的，我们仍然可以从 9-31 归并定义力而使问题得以简化。力的概念是为了解决问题的实用目的而定义的，从理论研究的角度看是不可取的，因为它混淆了流形的几何性质和物理性质。

令 $$Y = \frac{1}{\rho}X = \frac{1}{\rho}v^k\frac{\partial}{\partial x^k} \quad X \in \mathfrak{g}(M) \quad \rho \in F^0 \tag{25-15}$$

$$\eta = \rho\omega = \rho v_k \mathrm{d}x^k \qquad \omega \in \mathfrak{g}^*(M) \tag{25-16}$$

其中

$$< X, \omega > = 1 \qquad X = g(\omega) \tag{25-17}$$

因此

$$< \eta, Y > = 1 \qquad L_Y Y = L_Y \eta = 0 \tag{25-18}$$

$$L_Y\eta = 0 = \frac{1}{\rho}L_X\eta + \mathrm{d}(\frac{1}{\rho}) \wedge i_X\eta$$

$$= \frac{1}{\rho}[u^*]^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{[u^*](\rho v_k)\}\mathrm{d}x^k - \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2} \wedge \rho < X, \omega >$$

$$= \left\{ \frac{d(\rho v_k)}{dt} - \rho v_i \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} - \frac{\partial p}{\partial x^k} \right\} \frac{1}{\rho} dx^k \tag{25-19}$$

我们可以把 Newton 第二定律写为

$$\frac{d(\rho v_k)}{dt} = F_k = \rho v_i \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x^k} \tag{25-20}$$

在 25-20 中流形的物理性质与几何性质是分开的。

我们还可以进一步把 25-20 在 Ω 上积分

$$\int_\Omega \frac{d(\rho v_j)}{dt} dv = \int_\Omega \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\rho v_j)_{t+\Delta t} - (\rho v_j)_t}{\Delta t} dv$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_\Omega [(\rho v_j)_{t+\Delta t} - (\rho v_j)_t] dv}{\Delta t}$$

$$= \frac{d\int_\Omega \rho v_j dv}{dt} = \int_\Omega F_j dv \tag{25-21}$$

得到积分形式的 Newton 第二定律

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{25-22}$$

这里 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别是矢量形式的动量与合力。

对于一个给定的物理问题，当流形上的局部物理定律未知的时候，可以把 Newton 第二定律作为局部物理定律。这个定律的巧妙之处在于把所有与群表示有关的项归并定义为力，方程的左边与群表示无关。如果我们能够用另外的方法得到流形上任何一点的力 F^k，9-15 或 9-31 的右端成为已知量，左端与结构群的表示无关，我们把 25-20 的左端延拓到整个观测空间，求解动量张量变为欧氏空间中的问题。可以有两种方法得到力：其一是用实验测量；其二是采用经验公式，例如 Newton 应力公式和 Reynolds 应力公式，从前者导出了 Navier-Stokes 方程，从后者导出了 Reynolds 方程。

到目前为止，我们并没有指明物理问题的态，因此 25-20 可以用

于任何态的物理问题。如果定义压力 p 是 ρ 的单值函数，假定 ρ 所代表的质量满足状态方程

$$f(p,\rho)=0 \tag{25-23}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial x^j}=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}p}\frac{\partial p}{\partial x^j} \tag{25-24}$$

这样得到的方程限于 25-23 所确定的态。

在应用本书的理论求解一个物理问题的时候，我们仅仅求出了一个 p 阶反对称张量，按照第四章的命题，一个物理问题的一般解是一个张量级数，其中的每一个张量一般地不是反对称的，因此我们还没有完成任务。事实上，在第十五章的边界条件反演中我们得到了流形上的一个 p 形式，利用第十章的方法可以求出流形的联络系数 Γ^i_{jk}。把联络系数代入 25-20 可以得到一个常微分方程组，积分这个方程组使之满足对应的边界条件可以得到任意阶非反对称张量。这样我们就最终求出了物理问题的全部解。

Pauli 不相容原理：在第二十一章中我们叙述了 Pauli 不相容原理和 Pauli 选择定则。Pauli 不相容原理在化学中的本来意义是原子中不会有两个电子处于同一条轨道上，因此 Pauli 不相容原理不是第二十一章中所叙述的 Pauli 选择定则。

关于流体力学中的绕流问题：本书提出的理论可以用于求解流体力学中的任何绕流问题。具体求解过程仍然是及其烦冗的，在这里我们仅仅指出流场中的流线其实就是第六章里解出的特征线。

关于湍流的失稳：著名的 Reynolds 实验和同心圆管之间的流动实验向我们充分展示了湍流的失稳过程，这个过程说明当我们连续改变来流或边界条件中的某些参数时，得到的解的变化可以是不连续的。事实上，当我们用边界条件反演求解一个绕流问题的时候，边界条件中的一些参数，例如：绕流物体的尺寸 ϕ、来流的速度 v_0 等就会进入我们的解。当这些参数在某些范围内变化时，解的特征线，也就是流场的流线会随之连续变化。但是当这些参数或这些参数的某

个组合达到临界值时，特征线或流线发生跳跃变化，出现失稳。我们有现成的数学工具来研究这种失稳现象，那就是常微分方程组解的分岔理论[22]。对这一课题本书不进行深入研究。

关于闪电的生成：闪电生成的机理一直是困扰物理学家的一个问题。气体的流动是有质量场，从第二十四章的叙述我们可以知道，剧烈对流的雷雨云是一个可积流形 M，从 M 自然会产生复流形 Q，Q 具有电场和磁场，空气被电场的高压击穿就是闪电。

关于太阳系的水内行星：每当发生日全食的时候，天文学家们总是试图观测到可能存在于水星轨道以内的行星。我们知道周期出现的太阳黑子的温度大大低于太阳表面的温度，可见黑子是正在凝聚冷却的质量，因此黑子就是水内行星及其卫星，只不过这些行星和卫星还未凝聚为较为确定的形状而已。鉴于太阳系对于人类是极端重要的，准确确定太阳系的各个量子数具有无庸置疑的紧迫性。得到这些量子数以后，我们就可以找到太阳系内所有的天体，可以准确计算每一个天体的轨道，甚至可以计算出一个天体，如地球，上任何一点的相轨线。

关于恒星的演化：恒星及其行星的运动具有周期性，因此恒星是量子。按照我们的理论，恒星在凝聚的过程中质量密度单调增大，因此红巨星是最年轻的恒星阶段，其次是主序星、白矮星、和中子星。

关于银河系的本质：我们有三种不同的解，它们是解析的绕流解、涡子和量子以及奇异的黑洞解。那么银河系究竟属于哪一类呢？在做绕流实验时我们观察到，上游来流总是把涡子和量子带到绕流物体的下游，因此量子和涡子呈彗发状分布。黑洞解不涉及上游来流，所以量子和涡子不会呈彗发状分布。银河系以及其他星系之中的质量都是呈有规律的圆球、圆盘或旋涡状分布，因此星系肯定不是绕流解。银河系肯定不是第一类黑洞，因为第一类黑洞最多只能释放出既没有磁场又没有电场的量子，而我们知道太阳系的各个星体都或多或少带有磁场。如果星系是第二类黑洞，当黑洞解的展开式 16-19

中的 ϕ_{lmn} 在 θ 和 φ 方向的势不为零的时候，物理场确实呈旋涡状，奇点释放出的量子也将呈旋涡状分布。如果星系的中心是解析的，那么星系是一个巨大的量子，当量子数取不同的值时，星系中的恒星分布作为量子的质量分布也可以呈现旋涡状。但是，一个解析的量子竟然会有上千亿个渐进稳定域，凝聚出上千亿颗恒星，这是不可想象的，所以这个可能性基本上可以被否定。如果银河系中心能够不断产生新恒星，银河系就是第二类黑洞解，这有待观测证实。

旋涡星系的旋臂之谜：按照 Newton 万有引力定律，星系的引力是指向星系中心的，向心的引力不可能维持星系旋臂的稳定。在第十四章的求解过程中我们假定 $U(\theta)$ 和 $U(\varphi)$ 均可不为 0，由于 θ 或 φ 方向的势出现在方程中，星系的力场不再是向心的 Newton 万有引力，这样的解将具有旋涡结构。

关于原子黑洞：如果产生恒星的黑洞解是银河系的话，必然也应该有产生原子的黑洞解，而且原子黑洞应该大量存在，经常被观测到才对。用银河系的直径除以太阳系的直径(10 万光年 /60 亿 km)，再乘以原子的直径(10^{-10}m)，可以估算原子黑洞的可观测直径平均在 15mm 左右。如果其中一些原子黑洞甚大于 15mm，且与地球的相对速度不大，就应该可以被观测到，因为黑洞中心产生的量子数很大的原子会迅速裂变，释放出很大的能量来，或许人们观测到的 UFO 就是正在穿过地球大气层的原子黑洞，球状闪电似乎也是某种黑洞。黑洞的中心不遵从能量和质量守恒，如同一个能量和质量发生器一样，假如我们能够控制原子黑洞的运动，使之与地球的运动同步，就像同步卫星一样，那我们就获得了用之不竭的能源。显而易见的是，如果把原子黑洞放在一个一端开口的容器内，就成为一个永远工作的火箭发动机。假如能够用力场或磁场控制黑洞的运动，用这种发动机驱动的宇宙飞船将可以到达任何目的地。即便不能控制原子黑洞，我们仍然可能制造一种宇宙飞船，这种飞船的运行依靠不断地捕获能产生足够能量的、运动方向与我们的目标方向大致相同的原子黑洞。具

体做法是：当遇到一个新的原子黑洞，将新黑洞的运动方向与已有黑洞的运动方向比较，如果新黑洞的轨迹比已有黑洞的轨迹更接近目的地，则放弃已有黑洞捕获新的黑洞。

关于化学键：在化学里，人们称化合物中把原子结合在一起的力为化学键。按照已有的化学理论，化学键有离子键、共价键和金属键三种，其主要论点是当电子得失时出现的库仑力形成化学键。但是这个理论无法解释为何会存在稳定电子层，也没有看到有人计算过库仑力是否足以维系化学键的稳定，更无法解释相距很近的核内质子和中子是如何稳定地联系在一起。我们对于这个问题的解释是简单而明确的：能够支撑一个不可约表示的 N 维线性函数空间将构成稳定的电子层，这个层中的电子将在一起运动，而那些不能支撑不可约表示的电子才是依靠库仑力维系在一起。无疑，这样的电子是很不稳定的，它们要么离开原子，要么俘获电子构成稳定电子层。质子也是靠它们所支撑的不可约表示而维系在一起构成稳定结构，无须考虑质子之间作用的力的大小和性质。

宇宙是有限还是无限：如果宇宙是有限的，就可以用球 Bessel 函数来求解径向方程。注意到宇宙中的原子和恒星都有非零的力场，可见都是用 Schrödinger 方程特征解来求解径向方程的，由此我们可以肯定宇宙是无限的。

关于不同的时空结构：按照我们的定义，不同构的流形上作用着不同构的 Lie 群。Einstain 相对论时空、Newton 时空与 Lorentz 时空的本质不同在于它们上面作用的结构群不同构，硬要把其中一种时空作为另一种时空的特例是错误的。

流形上的特征曲面和激波：众所周知，在空气动力学中的一种常见的物理问题是求解跨音速流动，跨音速流场可以分为超音速、音速和亚音速三部分，超音速区域和亚音速区域通常以激波为界。激波这种物理现象是如何形成的呢？

现在讨论一个 m 维流形 M 上的绕流问题，如果给定一个恰当的

$p-1$ 链 ∂C,及其 ∂C 上的边界条件,我们可以通过反演得到 p 形式 η。运用算子 $*$ 和 d 以及外积可以得到 M 上的 2 形式

$$\eta = a_{jk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k \tag{25-25}$$

用度规张量对 η 作升指标运算后得到 2 矢量

$$X = g(\eta) = a^{jk}\frac{\partial}{\partial x^j}\wedge\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{25-26}$$

按照我们的定义,张量就是微分方程,因此上式可以写作

$$X(W) = \sum_{j,k=1}^{m} a^{jk}\frac{\partial W}{\partial x^j}\frac{\partial W}{\partial x^k} = 0 \tag{25-27}$$

这个方程可以看作是某个二阶偏微分方程的特征面方程。由于任何非线性物理定律可以展开为张量定律,我们

定义 25-1:25-27 为流形的特征曲面方程。

根据 $\Delta = \det[a^{jk}(x)]$ 在每一点 x 的值,我们可以描述流形上点的性质:$\Delta < 0$ 的点为椭圆点;$\Delta = 0$ 的点为抛物点;$\Delta > 0$ 的点为双曲点。如果某个区域上所有的点都是椭圆的,就说这个区域为椭圆域。类似地可以定义抛物域和双曲域。称满足

$$\sum_{j,k=1}^{m} a^{jk}\lambda_j\lambda_k = 0 \tag{25-28}$$

的矢量

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \tag{25-29}$$

为特征曲面的法线矢量。显然,如果一个曲面上任何点的法线矢量等于 $\boldsymbol{\lambda}$,那么这个曲面就是特征曲面。按照偏微分方程理论,在穿过实特征曲面的时候偏微分方程的解是弱间断的,也就是说方程的解只有连续的一阶导数,其二阶导数不连续。如果区域 Ω 是椭圆的,则 $\boldsymbol{\lambda}$ 是复数域上的矢量,流形上并没有实际存在的特征曲面,解在 Ω 上的二阶导数连续。如果区域 Ω 是双曲的,则 $\boldsymbol{\lambda}$ 是实数域上的矢量,流形上实际存在特征曲面,解在双曲域上点点弱间断。文献[19]提出流场中的弱间断可以汇聚成为强间断,并且把这个观点成功地应用

于跨音速流场数值计算中的激波捕捉上。这提示我们激波是由特征曲面汇聚而成，所以激波应该是特征曲面的包络面。假定我们已经求出 25-27 决定的特征曲面族

$$\phi(x^1, x^2, \cdots, x^m, \mu) = 0 \tag{25-30}$$

其中 μ 是特征曲面族的实参数。在数学分析里我们已经熟知，从方程组

$$\begin{cases} \phi(x^1, x^2, \cdots, x^m, \mu) = 0 \\ \dfrac{\partial \phi(x^1, x^2, \cdots, x^m, \mu)}{\partial \mu} = 0 \end{cases} \tag{25-31}$$

中消去 μ 就得到特征曲面的包络面，因而就得到了激波。

值得指出的是，本章提出的求解特征曲面和激波的方法适用于任何2阶张量，而决不仅仅是2形式。用数值方法求解25-28和25-31不会很困难。

第二十六章　物理问题的求解思路及量子化的理论意义

理论上，一个流形上给定的物理问题有可能直接求解。我们知道紧黎曼流形可以用有限个开域覆盖，如果每个开域上的物理定律(微分方程) 已知，直接积分并使之满足开域之间的衔接条件和边界条件就解出了物理问题。特别地，如果流形是欧氏的，用一个坐标系可以覆盖整个流形，问题就简化为求解一个微分方程。第十二章给出的基本方程和第二十五章给出的 Newton 第二定律都可以作为局部物理定律，但是这两个方程的右端项通常是未知的，无法直接求解，我们只能采用本书给出的边界条件反演的方法。现在我们给出一个完整的物理问题的解题思路：设在 M^m 上给定一个恰当的 $p-1$ 链 ∂C，$0 < p \leqslant m$，和 ∂C 上的一个已知函数 $\Sigma(x^1, x^2, \cdots, x^m)$，我们把 Σ 展开为 Tailor 级数

$$\Sigma(x) = \Sigma(x_0) + \frac{\partial \Sigma}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \Sigma}{\partial x^j \partial x^k}\mathrm{d}x^j \mathrm{d}x^k + \cdots \qquad (26\text{-}1)$$

把展开式中的 p 阶项

$$\frac{1}{p!}\frac{\partial^p \Sigma}{\partial x^{j_1} \cdots \partial x^{j_p}}\mathrm{d}x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_p} \qquad (26\text{-}2)$$

反对称化并且用 δ 作用之，就得到定义在 ∂C 上的 $p-1$ 形式 $\delta\eta_0$；类似地，把 $p-1$、$p-2$ 和 $m-p+1$ 阶项分别反对称化并且用适当的算子作用之可以得到定义在 ∂C 上的 $p-1$ 形式 η_0、$\mathrm{d}\eta_0$ 和 $*\eta_0$。我们从反对称的微分形式着手解决问题的目的之一是求出流形的联络系数，有了联络系数就可以用 Newton 第二定律把非对称的边界条件拓展到 p 链 C 上去。最常见的绕流问题是直接以实验数据的形式给出的，定义在一个 $m-1$ 链 $\partial\Omega$ 上的 $m-1$ 形式。有些特殊的物理问题

给定的是$\partial\Omega$上的一组已知函数。例如，在3维流形的域Ω的边界$\partial\Omega$上给定动量分布

$$\rho \boldsymbol{V}|_{\partial\Omega} = (\rho u, \rho v, \rho w) \tag{26-3}$$

ρ、u、v、w为x、y、z的已知函数。此时我们的问题是把函数组$(\rho u, \rho v, \rho w)$拓展到整个流形上去，采用协变基底还是逆变基底是无关紧要的。考虑到26-3是定义在2-链$\partial\Omega$上，直接令2形式

$$\eta = \rho u \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \rho v \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \rho w \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \tag{26-4}$$

为$\partial\Omega$上的边界条件即可。

以上边界条件一般应该在一个坐标系中给出，特别是直接以实验数据的形式给出的边界条件，如果采用两个以上坐标系定义边界条件很难保证可观测性公理成立。确定边界条件以后，我们可以：

Ⅰ. 选择适当态的Φ进行边界条件反演，求出$T^*(M)$上的微分p形式η。

Ⅱ. η就是M^m的任何开域上的物理定律，$\omega = \mathrm{d} * (\eta \wedge * \eta)$是$T^*(M)$上的1形式。

Ⅲ. 求出ω的积分因子就可以积分得到流形函数、质量密度ρ及$\vartheta = \omega/\rho \in \mathfrak{g}^*(M)$。

Ⅳ. 求出作用在$\mathfrak{g}^*(M)$上的酋表示u^*及其映射$F^*:\mathfrak{g}^*(O) \to \mathfrak{g}^*(M)$。

Ⅴ. 生成$\mathfrak{g}(M)$和$\mathfrak{g}^*(M)$。

Ⅵ. 计算出层流解的所有几何性质。

Ⅶ. 解出激波。

Ⅷ. 利用分岔理论研究层流解的失稳现象。

Ⅸ. 步骤Ⅰ的反演仅仅是把边界条件的反对称部分从∂C拓展到C上，有了步骤Ⅴ.求出的联络系数，就可以利用Newton第二定律把非对称的边界条件拓展到C上去。

Ⅹ. 求出可以脱离∂C运动的量子和涡子。

Ⅺ. 利用运动稳定性理论和极限集讨论量子和涡子凝聚后的形

态。

Ⅻ. 讨论量子和涡子的统计特性。

XⅢ. 计算出量子和涡子在凝聚前后的所有几何性质。

XⅣ. 推导原子结构。

XⅤ. 用群表示论的方法研究量子和涡子的聚变反应和蜕变反应、化合反应和分解反应、湮灭反应以及第二十一章中定义的与某个张量算子有关的反应。

XⅥ. 利用正交函数之间的映射关系研究相变。

XⅦ. 利用Newton第二定律研究层流解和涡子上的质量、力、速度、加速度等物理量的分布。以上程序可以用于求解任何物理问题。至于黑洞问题的求解，除了边界条件反演略有不同外，其余相同。

到目前为止，我们已经把任何一个物理问题量子化了。量子化不仅在求解物理问题时具有重大实用价值，而且在人类探寻科学真理的努力中具有无与伦比的理论价值。众所周知，我们可以把自然定律分为高级的和低级的。从高级定律可以推导出低级定律，例如，从Newton 第二定律可以推导出自由落体定律。反之，从低级定律到高级定律一般没有一条逻辑通路。许多优秀的前辈科学家都曾为此苦恼，认为从低级真理得到高级真理的唯一办法是冥思苦想和灵感，这样的回答很难令人满意，因为灵感不是经常有的，冥思苦想可以是毫无结果的。我们发现从低级真理到高级真理并非完全无路可寻，至少有一条路是可行的，那就是数学归纳法。数学归纳法的基本原理是：设有某个待证的与自然数列有关的自然定律可以表示为数论函数

$$\Phi(N) = 0 \qquad N = 1, 2, \cdots \tag{26-5}$$

已知

$$\Phi(1) = 0 \tag{26-6}$$

成立。假设

$$\Phi(n) = 0 \qquad n \text{ 是正整数} \tag{26-7}$$

如果能从 26-7 推出

$$\Phi(n+1)=0 \tag{26-8}$$

则 26-5 对任意自然数 N 成立。可见，用数学归纳法可以从 26-6 成立推出 26-5 成立，或者说从个体的成立推导出整体的成立，也就是说从低级定律推出了高级定律。我们说 26-5 是高级定律不仅仅因为它是整体的。如果 $N \in [0,\infty)$，通过极限运算令 $N \to \infty$，往往可以得出迥然不同的、更高级的自然定律来。迄今为止，这是我们所看到的从低级真理到高级真理唯一的逻辑通路，而这唯一的通路完全依赖于物理定律可以量子化为 26-5 的形式。换言之，为了从低级定律得到高级定律，必须首先把问题量子化。由此可见量子化对科学真理的探寻是何等重要。可以这样说，只有量子化的自然定律才是完美的。因为只有这样的定律才可能在数学力量的推动下从低级走向高级。可以预言，发现完美的科学定律的有力工具将是数学归纳法和数论，而量子化是打开自然规律宝库之门的钥匙。

从 Δ 算子特征值的求解过程可以看出，任何特征值必为代数数。我们很自然地想到是否有反命题成立？要证明这个命题是不容易的，我们只能把它作为一个猜想写在这里：

猜想：任给 $\lambda \in R$，λ 是算子 Δ^n 的特征值的充分必要条件是：λ 是一个代数数。

如果这个猜想成立，那么数论作为数学王冠上的一颗明珠就首次进入了物理学，它将对所有的物理学分支起指导作用，因为任何物理量都可以展开为 Δ 算子的特征形式的级数。而且数轴上那些超越数将具有极其重大的理论价值，从直觉上可以想到超越数应当与黑洞有关。超越数不是 Δ 算子的特征值，就像是数轴上的黑洞一样。或许从这个意义上可以说“数即万物”。

附录 Ⅰ　用 Sonine-Laguerre 多项式求 Schrödinger 方程的径向解

Sonine-Laguerre 多项式 S_n^α 的标准方程[12] 是

$$x\frac{\mathrm{d}^2 S_n^\alpha}{\mathrm{d}x^2} + (\alpha + 1 - x)\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x} + nS_n^\alpha = 0 \tag{Ⅰ-1}$$

S_n^α 的正交关系是

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x} S_m^\alpha S_n^\alpha \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}\delta_{mn} \tag{Ⅰ-2}$$

S_n^α 满足递推公式

$$(n + 1)S_{n+1}^\alpha + (x - \alpha - 2n - 1)S_n^\alpha + (n + \alpha)S_{n-1}^\alpha = 0 \tag{Ⅰ-3}$$

Ⅰ-3 两端分别乘以 $x^\alpha e^{-x}S_{n+1}^\alpha$、$x^\alpha e^{-x}S_n^\alpha$ 和 $x^\alpha e^{-x}S_{n-1}^\alpha$，并在$[0,\infty)$上积分得到准正交关系

$$\int_0^\infty x^{\alpha+1} e^{-x} S_m^\alpha S_n^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} C_1 & n = m + 1 \\ C_2 & n = m \qquad C_j \in R \\ C_3 & n = m - 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{Ⅰ-4}$$

类似地，在 Ⅰ-3 两端分别乘以 $x^{\alpha+1}e^{-x}S_{n+2}^\alpha$、$x^{\alpha+1}e^{-x}S_{n+1}^\alpha$、$x^{\alpha+1}e^{-x}S_n^\alpha$、$x^{\alpha+1}e^{-x}S_{n-1}^\alpha$ 和 $x^{\alpha+1}e^{-x}S_{n-2}^\alpha$，在$[0,\infty)$上积分并且考虑 Ⅰ-4 可得

$$\int_0^\infty x^{\alpha+2}e^{-x}S_m^\alpha S_n^\alpha \mathrm{d}x = \begin{cases} C_1 & n = m+2 \\ C_2 & n = m+1 \\ C_3 & n = m \\ C_4 & n = m-1 \\ C_5 & n = m-2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad C_j \in R \tag{Ⅰ-5}$$

一般地，S_n^α 的准正交关系是

$$\int_0^\infty x^{\alpha+\beta}e^{-x}S_m^\alpha S_n^\alpha \mathrm{d}x = C_{nm}\omega_{nm} \qquad C_{nm} \in R \tag{Ⅰ-6}$$

$$\omega_{nm} = \begin{cases} 1 & |m-n| \leqslant \beta \\ 0 & |m-n| > \beta \end{cases} \qquad \beta \text{ 为零或正整数} \tag{Ⅰ-7}$$

令 ϕ_n 满足准正交关系

$$\int_0^\infty \phi_m\phi_n r^2 \mathrm{d}r = C_{nm}\omega_{nm} \tag{Ⅰ-8}$$

如果 $m = n$，比较 Ⅰ-6 和 Ⅰ-8 可得

$$\phi_n = \frac{1}{r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{Ⅰ-9}$$

ϕ_n 是实函数，所以 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}r \geqslant 0$。微分 Ⅰ-9 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}r} = & -\frac{1}{r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{\alpha+\beta}{2r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}} \\ & + \frac{1}{2r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}\end{aligned} \tag{Ⅰ-10}$$

再微分一次

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}r^2} = \frac{2}{r^3}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\alpha+\beta}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}} \\
& -\frac{1}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}} \\
& +\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2S_n^\alpha}{\mathrm{d}x^2}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{\alpha+\beta}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& -\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& -\frac{\alpha+\beta}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{\alpha+\beta}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& +\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-2}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& -\frac{\alpha+\beta}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& +\frac{3}{4r}(\alpha+\beta)S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& +\frac{1}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& -\frac{\alpha+\beta}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{5}{2}} \\
& -\frac{3}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& -\frac{1}{2r^2}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& +\frac{1}{2r}\frac{\mathrm{d}S_n^\alpha}{\mathrm{d}x}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& +\frac{\alpha+\beta}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} \\
& -\frac{1}{4r}S_n^\alpha x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{1}{4r}S_n^{\alpha}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{d^2x}{dr^2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2r}S_n^{\alpha}x^{\frac{\alpha+\beta}{2}}e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{d^3x}{dr^3} \qquad (\text{I}-11)$$

代入径向方程

$$\frac{d^2\phi_n}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\phi_n}{dr}+\left[U(r)-\frac{\sigma}{r^2}\right]\phi_n=0 \qquad (\text{I}-12)$$

整理之，使得$\frac{d^2S_n^{\alpha}}{dx^2}$的系数与$S_n^{\alpha}$的标准方程中$\frac{d^2S_n^{\alpha}}{dx^2}$的系数一样，比较$\frac{dS_n^{\alpha}}{dx}$的系数得

$$-\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-1}-\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-1}+\frac{\alpha+\beta}{2}x^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-2}\frac{d^2x}{dr^2}$$

$$+\frac{\alpha+\beta}{2}x^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-2}\frac{d^2x}{dr^2}+\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dr}\right)^{-1}=\frac{\alpha+1-x}{x}$$

$$(\text{I}-13)$$

化简可得

$$\frac{d^2x}{dr^2}=\frac{1-\beta}{2x}\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 \qquad (\text{I}-14)$$

令

$$\frac{dx}{dr}=y \qquad \frac{d^2x}{dr^2}=y\frac{dy}{dx} \qquad (\text{I}-15)$$

代入 I-14 得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-\beta}{2x}y \qquad (\text{I}-16)$$

解得

$$y=\frac{dx}{dr}=\mu x^{\frac{1-\beta}{2}} \quad \mu\in R \qquad (\text{I}-17)$$

$$x^{\frac{\beta-1}{2}}dx=\mu dr \qquad (\text{I}-18)$$

积分得

$$\frac{2}{\beta+1}x^{\frac{\beta+1}{2}}=\mu r+D \qquad (\text{I}-19)$$

由于 x 与 r 都定义在$[0,\infty)$上，

$$x = 0 \text{ 时} \quad r = 0 \tag{Ⅰ-20}$$

$$\therefore \quad D = 0 \tag{Ⅰ-21}$$

$$x = (Cr)^{\frac{2}{\beta+1}}, \quad C = \frac{\beta+1}{2}\mu, \quad Cr = x^{\frac{\beta+1}{2}} \tag{Ⅰ-22}$$

比较 S_n^α 的系数得

$$\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)}{4}x^{-2} + (\alpha+\beta)x^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{2}x^{-1} + \frac{1}{4} - \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-2}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-4}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-3}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}r^3} + \left[U(r) - \frac{\sigma}{r^2}\right]\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-2} = \frac{n}{x} \tag{Ⅰ-23}$$

$$-U(r) = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)}{4}x^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 + (\alpha+\beta)x^{-1}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{2}x^{-1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2}\right)^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}r^3} - \frac{\sigma}{r^2} - \frac{n}{x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}\right)^2 \tag{Ⅰ-24}$$

微分 Ⅰ-22 得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = C\frac{2}{\beta+1}(Cr)^{\frac{2}{\beta+1}-1} = C\frac{2}{\beta+1}x^{1-\frac{\beta+1}{2}} \tag{Ⅰ-25}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}r^2} = C^2\frac{2}{\beta+1}\left(\frac{2}{\beta+1}-1\right)x^{-\beta} \tag{Ⅰ-26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}r^3} = C^3\frac{2}{\beta+1}\left(\frac{2}{\beta+1}-1\right)\left(\frac{2}{\beta+1}-2\right)x^{-\frac{1}{2}(3\beta-1)} \tag{Ⅰ-27}$$

把 Ⅰ-25、Ⅰ-26、Ⅰ-27 代入 Ⅰ-24

$$-U(r)\frac{4}{\mu^2(\beta+1)^2} = \left[\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)}{(\beta+1)^2}\right.$$

$$+(\alpha+\beta)\frac{2}{\beta+1}(\frac{2}{\beta+1}-1)-\frac{1}{4}(\frac{2}{(\beta+1)}-1)^2-\sigma]x^{-1-\beta}$$

$$+[\frac{1}{2}(\frac{2}{\beta+1}-1)(\frac{2}{\beta+1}-2)-n(\frac{2}{\beta+1})^2$$

$$-\frac{\alpha+\beta}{2}(\frac{2}{\beta+1})^2-\frac{2}{\beta+1}(\frac{2}{\beta+1}-1)]x^{-\beta}$$

$$+[\frac{1}{4}(\frac{2}{\beta+1})^2]x^{1-\beta} \qquad (\text{I}-28)$$

I -28 可以写成

$$U(r)=\mu^2(ax^{-(\beta+1)}+bx^{-\beta}+cx^{1-\beta}) \qquad (\text{I}-29)$$

其中

$$a=\frac{(\beta+1)^2}{4}[\frac{1}{4}(\frac{2}{\beta+1}-1)^2+\sigma-\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-2)}{(\beta+1)^2}$$

$$-(\alpha+\beta)\frac{2}{\beta+1}(\frac{2}{\beta+1}-1)]$$

$$b=\frac{(\beta+1)^2}{4}[\frac{2}{\beta+1}(\frac{2}{\beta+1}-1)$$

$$-\frac{1}{2}(\frac{2}{\beta+1}-1)(\frac{2}{\beta+1}-2)$$

$$+n(\frac{2}{\beta+1})^2+\frac{\alpha+\beta}{2}(\frac{2}{\beta+1})^2]$$

$$c=-\frac{1}{4} \qquad (\text{I}-30)$$

$\beta=0$ 时,

$$x=(\mu r)^2 \qquad (\text{I}-31)$$

$$U(r)=\frac{\mu^2}{4}[-x+2(2n+\alpha+1)+\frac{1}{x}(\sigma+\frac{1}{4}-\alpha^2)] \qquad (\text{I}-32)$$

$\beta=1$ 时,

$$x=\mu r \qquad (\text{I}-33)$$

$$U(r)=\mu^2\{[\sigma-\frac{\alpha^2-1}{4}]x^{-2}+[n+\frac{\alpha-1}{2}]x^{-1}-\frac{1}{4}\}$$

(Ⅰ-34)

最终得到解

$$\phi_n=S_n^\alpha x^h e^{-\frac{x}{2}} \qquad (Ⅰ\text{-}35)$$

其中　　$h=\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta+1}{4}$

当 α 等于零或正整数时，S_n^α 可以化为缔合 Laguerre 多项式 $L_{n+\alpha}^\alpha$，

$$S_n^\alpha(x)=\frac{(-1)^\alpha}{(n+\alpha)!}L_{n+\alpha}^\alpha(x) \qquad (Ⅰ\text{-}36)$$

$n<0$ 时，

$$L_{n+\alpha}^\alpha(x)\equiv 0 \qquad (Ⅰ\text{-}37)$$

当 α 等于正半整数时，S_n^α 可以化为缔合 Hermite 多项式，我们分两种情况讨论：

如果　　$\alpha=m-\frac{1}{2}$　其中 m 是偶数　　(Ⅰ-38)

$$S_n^\alpha(x)=S_n^{m-\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^{-n}2^{-2n}}{n!}H_{2n}^m(\sqrt{x}) \qquad (Ⅰ\text{-}39)$$

显然，当 $n<\frac{m}{2}$ 时，

$$S_n^\alpha(x)=0 \qquad (Ⅰ\text{-}40)$$

如果　　$\alpha=m+\frac{1}{2}$　其中 m 是奇数　　(Ⅰ-41)

$$S_n^\alpha(x)=S_n^{m+\frac{1}{2}}(x)=\frac{(-1)^{-n}2^{-2n-1}}{n!}H_{2n+1}^m(\sqrt{x}) \qquad (Ⅰ\text{-}42)$$

显然，当 $n<\frac{m-1}{2}$ 时，

$$S_n^\alpha(x)=0 \qquad (Ⅰ\text{-}43)$$

当 α 等于零、正整数或正半整数时，S_n^α 具有性质 Ⅰ-37、Ⅰ-40 和 Ⅰ-43，我们称之为递推截止性质，这个性质是非常有用的。

由于 β 为零或正整数，α 等于零、正整数或正半整数，我们可以确定 Ⅰ-36 中 h 的取值范围。h 一般地可以是 $h = n + (\frac{0}{4}、\frac{1}{4}、\frac{2}{4}$ 或 $\frac{3}{4})$，其中 n 是零或正整数。对不同的 α 和 β，ϕ_n 关于 r 具有不同的可微性，这取决于对 r 微分的时候会不会出现 r 的负幂次项。微分 Ⅰ-35 可以知道，直接对 x^h 微分使得 x 的幂次减少最快。所以给定 α 和 β，如果存在正整数 k 满足

$$2\alpha - (2k + 1)(\beta + 1) > 0 \tag{Ⅰ-44}$$

$$2\alpha - (2k + 3)(\beta + 1) < 0 \tag{Ⅰ-45}$$

成立，则 ϕ_n 是 k 阶可微的。ϕ_n 的 $k+1$ 阶微分在 $r = 0$ 奇异，ϕ_n 张成 C^k 检测函数空间。在某些情况下，Ⅰ-35 干脆就是奇异的。

当 $\beta = 0$ 时，对 x^h 微分使得 x 的幂次减少 $\frac{1}{2}$，对 S_n^α 或 $e^{-\frac{x}{2}}$ 微分使得 x 的幂次增加 $\frac{1}{2}$，显然，只要 h 是正整数或正半整数，ϕ_n 就是 C^∞ 的。此时 α 为正半整数。

当 $\beta = 1$ 时，对 x^h 微分使得 x 的幂次减少 1，对 S_n^α 或 $e^{-\frac{x}{2}}$ 微分使得 x 的幂次不变。显然，只要 h 是正整数，ϕ_n 就是 C^∞ 的。此时 α 是奇数。

当 $\beta > 1$ 时，对 x^h 微分使得 x 的幂次减少 $\frac{\beta - 1}{2}$，对 S_n^α 或 $e^{-\frac{x}{2}}$ 微分使得 x 的幂次减少 $\frac{\beta + 1}{2}$，ϕ_n 不可能是 C^∞ 的。如果物理问题是 C^∞ 的，只有 C^∞ 的 ϕ_n 才能用于求解。对于一个 C^r 的物理问题，所有 $C^k(k \geqslant r)$ 的 ϕ_n 均可用于求解。

附录 Ⅱ　Δ 算子特征 0 形式方程径向分量的求解

把 Schrödinger 气态解的势代入 14-15 得

$$\sum_n \{(\frac{1}{4}+\rho)x^2 - \frac{1}{2}(2n+\alpha+1)x + [\frac{\alpha^2-1}{4}-\sigma]\} A_n\phi_n = 0$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu^2} \qquad (\text{Ⅱ-1})$$

从缔合 Laguerre 多项式的递推公式直接得到

$$x\phi_n = (2n+1-\alpha)\phi_n - \frac{1}{n+1}(n+1-\alpha)\phi_{n+1} - n^2\phi_{n-1}$$

$$x\phi_{n+1} = (2n+3-\alpha)\phi_{n+1} - \frac{1}{n+2}(n+2-\alpha)\phi_{n+2} - (n+1)^2\phi_n$$

$$x\phi_{n-1} = (2n-1-\alpha)\phi_{n-1} - \frac{1}{n}(n-\alpha)\phi_n - (n-1)^2\phi_{n-2}$$

$$(\text{Ⅱ-2})$$

代入 Ⅱ-1 式可以得到，

$$\sum_n (a_n\phi_{n+2} + b_n\phi_{n+1} + c_n\phi_n + d_n\phi_{n-1} + e_n\phi_{n-2})A_n = 0 \qquad (\text{Ⅱ-3})$$

其中

$$a_n = (\frac{1}{4}+\rho)\frac{(n+1-\alpha)(n+2-\alpha)}{(n+1)(n+2)}$$

$$b_n = [\frac{1}{2}(2n+\alpha+1) - 2(\frac{1}{4}+\rho)(2n+2-\alpha)]\frac{n+1-\alpha}{n+1}$$

$$c_n = (\frac{1}{4}+\rho)[(2n+1-\alpha)^2 + (n+1)(n+1-\alpha)$$

$$+ n(n-\alpha)] - \frac{1}{2}(2n+\alpha+1)(2n+1-\alpha) + \frac{\alpha^2-1}{4} - \sigma$$

$$d_n = [\frac{1}{2}(2n + \alpha + 1) - 2(\frac{1}{4} + \rho)(2n - \alpha)]n^2$$

$$e_n = (\frac{1}{4} + \rho)n^2(n - 1)^2 \tag{Ⅱ-4}$$

当 $n < 0$ 的时候 $\phi_n \equiv 0$，把 Ⅱ－2 代入 Ⅱ－3 可以展开 Ⅱ－1 式得到

$$\begin{aligned}
&(a_0\phi_2 + b_0\phi_1 + c_0\phi_0) \quad A_0 \\
&+ (a_1\phi_3 + b_1\phi_2 + c_1\phi_1 + d_1\phi_0) \quad A_1 \\
&+ (a_2\phi_4 + b_2\phi_3 + c_2\phi_2 + d_2\phi_1 + e_2\phi_0) \quad A_2 \\
&\cdots\cdots \\
&+ (a_n\phi_{n+2} + b_n\phi_{n+1} + c_n\phi_n + d_n\phi_{n-1} + e_n\phi_{n-2}) \quad A_n \\
&\cdots\cdots = 0
\end{aligned} \tag{Ⅱ-5}$$

还可以写成：

$$\begin{aligned}
&(c_0A_0 + d_1A_1 + e_2A_2) \quad \phi_0 \\
&+ (b_0A_0 + c_1A_1 + d_2A_2 + e_3A_3) \quad \phi_1 \\
&+ (a_0A_0 + b_1A_1 + c_2A_2 + d_3A_3 + e_4A_4) \quad \phi_2 \\
&\cdots\cdots \\
&+ (a_{n-2}A_{n-2} + b_{n-1}A_{n-1} + c_nA_n + d_{n+1}A_{n+1} + e_{n+2}A_{n+2}) \quad \phi_n \\
&\cdots\cdots = 0
\end{aligned} \tag{Ⅱ-6}$$

由于 ϕ_n 是线性无关的函数基底，所以

$$\begin{aligned}
&(c_0A_0 + d_1A_1 + e_2A_2) = 0 \\
&(b_0A_0 + c_1A_1 + d_2A_2 + e_3A_3) = 0 \\
&(a_0A_0 + b_1A_1 + c_2A_2 + d_3A_3 + e_4A_4) = 0 \\
&\cdots\cdots \\
&+ (a_{n-2}A_{n-2} + b_{n-1}A_{n-1} + c_nA_n + d_{n+1}A_{n+1} + e_{n+2}A_{n+2}) = 0
\end{aligned}$$

……………………………………………………………………

(Ⅱ-7)

由此可以递推得到

$$\Phi_N = A_0 \Phi_N^1 + A_1 \Phi_N^2 \tag{Ⅱ-8}$$

$$\Phi_N^1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \phi_n \quad \Phi_N^2 = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \phi_n \tag{Ⅱ-9}$$

B_n 和 D_n 是递推得到的已知系数，由于径向方程是二阶常微分方程，上式中如我们所料出现了两个任意常数 A_0 和 A_1，这说明 Φ_N 是径向方程的通解。当所有的 $e_k \neq 0$，$(k \geqslant 2)$ 时系数 B_n 和 D_n 都可以递推出来。假定 Ⅱ-9 对任何 ρ 收敛，于是 ρ 可以在不包含 $-1/4$ 的区间上连续取值，进而 λ 也可以在某个区间上连续取值，这与 Δ 算子特征值的性质 4 矛盾，因此除了一些特殊的点以外 Ⅱ-9 必然不收敛。事实上从命题 14-1 我们知道，展开式 Ⅱ-9 中只能有有限个系数不为零。从公式 Ⅱ-7 可以看出，只要有连续 4 个系数为零，则以后所有系数的递推结果都为零。但这一般是不可能的，因为我们只有三个参数 l、α 和 ρ 可以独立变化，而且 l 和 α 只能取整数或半整数。注意到万有引力定律中的引力势和库仑定律中的库仑势都与 r^{-1} 成正比，我们考虑一种特殊情况，令

$$\frac{\alpha^2 - 1}{4} = \sigma \tag{Ⅱ-10}$$

则势为

$$U(x) = \frac{U(r)}{\mu^2} = (2n + \alpha + 1)\frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \tag{Ⅱ-11}$$

Ⅱ-1 和 Ⅱ-3 分别简化为

$$\sum_n \{(\frac{1}{4} + \rho)x - \frac{1}{2}(2n + \alpha + 1)\} A_n \phi_n = 0 \tag{Ⅱ-12}$$

$$\sum_n (b_n \phi_{n+1} + c_n \phi_n + d_n \phi_{n-1}) A_n = 0 \tag{Ⅱ-13}$$

其中

$$b_n = -\left(\frac{1}{4} + \rho\right)\left(\frac{n+1-\alpha}{n+1}\right)$$

$$c_n = \left(\frac{1}{4} + \rho\right)(2n + \alpha + 1) \qquad (\text{II-14})$$

$$d_n = -\left(\frac{1}{4} + \rho\right)n^2$$

注意到 $n < 0$ 时 $\phi_n \equiv 0$, II-13 式可以展开为

$$\begin{aligned}
&(b_0\phi_1 + c_0\phi_0) \quad A_0 \\
&+ (b_1\phi_2 + c_1\phi_1 + d_1\phi_0) \quad A_1 \\
&+ (b_2\phi_3 + c_2\phi_2 + d_2\phi_1) \quad A_2 \\
&\cdots\cdots \\
&+ (b_k\phi_{k+1} + c_k\phi_k + d_k\phi_{k-1}) \quad A_k \\
&\cdots\cdots = 0
\end{aligned} \qquad (\text{II-15})$$

或者

$$\begin{aligned}
&(c_0A_0 + d_1A_1) &= 0 \\
&(b_0A_0 + c_1A_1 + d_2A_2) &= 0 \\
&(b_1A_1 + c_2A_2 + d_3A_3) &= 0 \\
&(b_2A_2 + c_3A_3 + d_4A_4) &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
&(b_{n-2}A_{n-2} + c_{n-1}A_{n-1} + d_nA_n) &= 0 \\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (\text{II-16})$$

这样,虽然可以独立变化的参数由于 II-10 的限制少了一个,但是现在只要有两个连续的系数为零就可以使递推过程截止。而我们恰好有两个可以自由变动的参数 α 和 ρ,因此这是可以办到的。任给 N,令

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2 - 1}{4} = \sigma \\ A_N(\alpha, \sigma, \rho) = 0 \\ A_{N+1}(\alpha, \sigma, \rho) = 0 \end{cases} \tag{Ⅱ-17}$$

最后可以把气态解写成

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^{N-1} A_n (\mu r)^{\frac{\alpha-1}{2}} e^{-\frac{\mu r}{2}} L_n^{\alpha}(\mu r) \quad A_n \in R \tag{Ⅱ-18}$$

其中 $\rho \geqslant 0, 0 \leqslant l \leqslant \dfrac{N-1}{2}$

附录 Ⅲ　用 Jacobi 多项式求 Schrödinger 方程的 θ 旋涡解

Jacobi 多项式的标准方程是

$$(1-y^2)\frac{d^2P_l^{\beta\gamma}}{dy^2}-[(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma+2)y]\frac{d^2P_l^{\beta\gamma}}{dy}+l(l+\beta+\gamma+1)P_l^{\beta\gamma}=0 \tag{Ⅲ-1}$$

正交关系是

$$\int_{-1}^{1}(1-y)^{\alpha}(1+y)^{\beta}P_l^{\beta\gamma}P_m^{\beta\gamma}dy=\frac{2^{\beta+\gamma+1}}{\beta+\gamma+2l+1}\times\frac{\Gamma(\gamma+l+1)\Gamma(\beta+l+1)}{l!\,\Gamma(\beta+\gamma+l+1)}\delta_{ml} \tag{Ⅲ-2}$$

$$\beta>-1,\gamma>-1$$

在某些文献中 Ⅲ-1 被称为广义超球方程[16]。令 ϕ_l 满足正交关系

$$\int_{0}^{\pi}\phi_l(\theta)\phi_m(\theta)\sin\theta d\theta=\int_{\pi}^{0}\phi_l(\theta)\phi_m(\theta)d(\cos\theta)$$

$$=\int_{-1}^{1}\phi_l(y)\phi_m(y)dy=\frac{2^{\beta+\gamma+1}}{\beta+\gamma+2l+1}\times\frac{\Gamma(\beta+l+1)\Gamma(\gamma+l+1)}{l!\,\Gamma(\beta+\gamma+l+1)}\delta_{ml} \tag{Ⅲ-3}$$

其中

$$y=\cos\theta \tag{Ⅲ-4}$$

把 Ⅲ-4 式代入 Schrödinger 方程的 θ 分量方程得到

$$(1-y^2)\frac{d^2\phi_l}{dy^2}-2y\frac{d^2\phi_l}{dy}+\left[\sigma-\frac{\kappa}{1-y^2}-U(y)\right]\phi_l=0 \tag{Ⅲ-5}$$

这里我们先入为主地假定 Ⅲ-1 中的 y 和 Ⅲ-5 中的 y 是同一个

变量。我们知道二者之间的函数关系取决于 Ⅲ-1 和 Ⅲ-5 中 $P_l^{\beta\gamma}$ 的一阶导数的系数，如果我们的假设是对的，则 Ⅲ-1 和 Ⅲ-5 对应 $P_l^{\beta\gamma}$ 的一阶导数的系数应该恒相等。当 $m = l$ 时比较 Ⅲ-2 和 Ⅲ-3 得

$$\phi_l = (1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}} P_l^{\beta\gamma} \tag{Ⅲ-6}$$

微分 Ⅲ-6 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\phi_l}{\mathrm{d}y} = &-\frac{\beta}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}} P_l^{\beta\gamma}\\ &+\frac{\gamma}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-1} P_l^{\beta\gamma}\\ &+(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}}\frac{\mathrm{d}P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y}\end{aligned} \tag{Ⅲ-7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\phi_l}{\mathrm{d}y^2} = &\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}-1\right)(1-y)^{\frac{\beta}{2}-2}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}} P_l^{\beta\gamma}\\ &-\frac{\beta}{2}\frac{\gamma}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-1} P_l^{\beta\gamma}\\ &-\frac{\beta}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}}\frac{\mathrm{d}P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y}\\ &-\frac{\beta}{2}\frac{\gamma}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-1} P_l^{\beta\gamma}\\ &+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\gamma}{2}-1\right)(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-2} P_l^{\beta\gamma}\\ &+\frac{\gamma}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-1}\frac{\mathrm{d}P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y}\\ &-\frac{\beta}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}-1}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}}\frac{\mathrm{d}P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y}\\ &+\frac{\gamma}{2}(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}-1}\frac{\mathrm{d}P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y}\\ &+(1-y)^{\frac{\beta}{2}}(1+y)^{\frac{\gamma}{2}}\frac{\mathrm{d}^2P_l^{\beta\gamma}}{\mathrm{d}y^2}\end{aligned} \tag{Ⅲ-8}$$

把 Ⅲ-7 和 Ⅲ-8 代入 Ⅲ-5 使二阶导数的系数与 Ⅲ-1 相同，考察 $P_l^{\beta\gamma}$

的一阶导数的系数确实得恒等式，这说明我们前面关于 y 的假定是对的。再考察 $P_l^{\beta\gamma}$ 的系数得，

$$U(y) = U[\cos(\theta)] = -l(l+\beta+\gamma+1) - \frac{\beta\gamma}{2} + \sigma$$

$$+ \frac{1}{1-y^2}\{y^2[\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}+1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}+1)] + y[\frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}]$$

$$+ [\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}-1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}-1) - \kappa]\} \qquad (\text{Ⅲ-9})$$

考察解 Ⅲ-6 和 Ⅲ-4，为了使 ϕ_l 在$\theta \in [0,\pi]$上解析，β和γ必为0，或同为偶数或奇数。若令

$$\beta^2 = \gamma^2 = \kappa, \quad l = n - m, \quad \sigma = n(n+1) \qquad (\text{Ⅲ-10})$$

$$U \equiv 0 \qquad (\text{Ⅲ-11})$$

然后把 n 改写为l，则我们得到缔合 Legendre 多项式

$$\phi_l = P_l^m(\cos\theta) \qquad (\text{Ⅲ-12})$$

我们称 $U \neq 0$ 的解为 θ 旋涡解，这样的解具有旋涡结构。

附录 Ⅳ　Δ 算子特征 0 形式方程 θ 分量的求解

把 14-13 写成

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l U(y) \phi_l = 0 \tag{Ⅳ-1}$$

将附录 Ⅲ 求出的势代入

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \{ -l(l+\beta+\gamma+1) - \frac{\beta\gamma}{2} + \sigma + \frac{1}{1-y^2} \{ y^2 [\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}+1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}+1)] + y[\frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2}] + [\frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}-1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}-1) - \kappa] \} \phi_l = 0 \tag{Ⅳ-2}$$

或

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \{ ay^2 + by + c \} \phi_l = 0 \tag{Ⅳ-3}$$

其中

$$a = l(l+\beta+\gamma+1) + \frac{\beta\gamma}{2} - \sigma + \frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}+1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}+1) \tag{Ⅳ-4}$$

$$b = \frac{1}{2}(\beta^2 - \gamma^2) \tag{Ⅳ-5}$$

$$c = -l(l+\beta+\gamma+1) - \frac{\beta\gamma}{2} + \sigma + \frac{\beta}{2}(\frac{\beta}{2}-1) + \frac{\gamma}{2}(\frac{\gamma}{2}-1) - \kappa \tag{Ⅳ-6}$$

如果要求 Φ_L 解析，β 和 γ 为 0，或同为偶数或奇数。

引用 Jacobi 多项式的递推公式

$$y\phi_l = \frac{1}{(2l+\beta+\gamma+1)(2l+\beta+\gamma)(2l+\beta+\gamma+2)}$$
$$\times[2(l+1)(l+\beta+\gamma+1)(2l+\beta+\gamma)\phi_{l+1}$$
$$-(2l+\beta+\gamma+1)(\beta^2-\gamma^2)\phi_l$$
$$+2(l+\beta)(l+\gamma)(2l+\beta+\gamma+2)\phi_{l-1}] \qquad (\text{IV-7})$$

展开 Ⅳ-3 得到

$$(c_0A_0+d_1A_1+e_2A_2) = 0$$
$$(b_0A_0+c_1A_1+d_2A_2+e_3A_3) = 0$$
$$(a_0A_0+b_1A_1+c_2A_2+d_3A_3+e_4A_4) = 0$$
$$\cdots\cdots$$
$$+(a_{l-4}A_{l-4}+b_{l-3}A_{l-3}+c_{l-2}A_{l-2}+d_{l-1}A_{l-1}+e_lA_l) = 0$$
$$\cdots\cdots \qquad (\text{IV-8})$$

从公式 Ⅳ-8 可以看出，只要有连续 4 个系数为零，则以后所有系数的递推结果都为零。

$$\begin{cases} A_L(\beta,\gamma,\sigma,\kappa)=0 \\ A_{L+1}(\beta,\gamma,\sigma,\kappa)=0 \\ A_{L+2}(\beta,\gamma,\sigma,\kappa)=0 \\ A_{L+3}(\beta,\gamma,\sigma,\kappa)=0 \end{cases} \qquad (\text{IV-9})$$

但是这基本上是不可能的，因为我们没有足够的可以独立变化的参数来保证方程组一定有解。

如果我们令 Ⅳ-5 中的 b 为零，则有

$$\beta=\pm\gamma \qquad (\text{IV-10})$$

为了保证解析，β 和 γ 同为偶数或奇数，注意到 β 和 γ 都是大于 -1 的数，显然上式的右端只能取正号。

$$\beta=\gamma \qquad (\text{IV-11})$$

于是 Ⅳ-3 成为

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l \{ay^2 + c\} \phi_l = 0 \quad (\text{Ⅳ-12})$$

Jacobi 多项式的递推公式变为

$$y\phi_l = \frac{1}{(2l+2\beta+1)(l+\beta)(l+\beta+1)} \times [(l+1)(l+2\beta+1)(l+\beta)\phi_{l+1} + (l+\beta)^2(l+\beta+1)\phi_{l-1}]$$
$$= R_l\phi_{l+1} + S_l\phi_{l-1} \quad (\text{Ⅳ-13})$$

其中

$$R_l = \frac{(l+1)(l+2\beta+1)(l+\beta)}{(2l+2\beta+1)(l+\beta)(l+\beta+1)} \quad (\text{Ⅳ-14})$$

$$S_l = \frac{(l+\beta)^2(l+\beta+1)}{(2l+2\beta+1)(l+\beta)(l+\beta+1)} \quad (\text{Ⅳ-15})$$

把 Ⅳ-13 代入 Ⅳ-12

$$\sum_l (a_l\phi_{l+2} + c_l\phi_l + e_l\phi_{l-2})A_l = 0 \quad (\text{Ⅳ-16})$$

其中

$$a_l = aR_lR_{l+1}$$
$$c_l = aR_lS_{l+1} + aS_lR_{l-1} + c$$
$$e_l = aS_lS_{l-1} \quad (\text{Ⅳ-17})$$

展开 Ⅳ-16 可得

$$(c_0A_0 + e_2A_2) = 0$$
$$(c_1A_1 + e_3A_3) = 0$$
$$(a_0A_0 + c_2A_2 + e_4A_4) = 0$$
$$(a_1A_1 + c_3A_3 + e_5A_5) = 0$$

……………………………………………

$$(a_{2l-2}A_{2l-2} + c_{2l}A_{2l} + e_{2l+2}A_{2l+2}) = 0$$
$$(a_{2l-1}A_{2l-1} + c_{2l+1}A_{2l+1} + e_{2l+3}A_{2l+3}) = 0$$

……………………………………………………

$$(\text{IV-18})$$

上式可以按 l 为奇数或偶数分为两个完全独立的递推序列，它们有各自的任意常数 A_0 和 A_1。因此，为了使递推截止，只要有两个相间的系数为零就可以了。

$$\begin{cases} A_L(\beta, \sigma, \kappa) = 0 \\ A_{L+2}(\beta, \sigma, \kappa) = 0 \end{cases} \tag{IV-19}$$

最后我们得到的 Φ_L 为

$$\Phi_L = A_0 \Phi_L^1 + A_1 \Phi_L^2 \tag{IV-20}$$

其中 A_0 和 A_1 是任意常数，

$$\Phi_L^1 = \sum_{n=0}^{L-1} B_n \phi_n \qquad n \text{ 为偶数} \tag{IV-21}$$

$$\Phi_L^2 = \sum_{m=1}^{L-1} D_m \phi_m \qquad m \text{ 为奇数} \tag{IV-22}$$

B_n 和 D_m 是递推得到的已知常数。如果采用 Schrödinger 方程的 $U \neq 0$ 的的解展开 Φ_L，则最终得到的特征解 Φ 具有旋涡结构。

附录 V　用 Jacobi 多项式求 Schrödinger 方程的 φ 旋涡解

把 Jacobi 多项式的标准方程写成

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 P_m^{\chi\upsilon}}{\mathrm{d}z^2}-[(\chi-\upsilon)+(\chi+\upsilon+2)z]\frac{\mathrm{d}P_m^{\chi\upsilon}}{\mathrm{d}z}$$

$$+m(m+\chi+\upsilon+1)P_m^{\chi\upsilon}=0 \qquad (\text{V-1})$$

正交关系为

$$\int_{-1}^{1}(1-z)^{\chi}(1+z)^{\upsilon}P_n^{\chi\upsilon}P_m^{\chi\upsilon}\mathrm{d}z=\frac{2^{\chi+\upsilon+1}}{\chi+\upsilon+2m+1}$$

$$\frac{\Gamma(\chi+m+1)\Gamma(\upsilon+m+1)}{m!\,\Gamma(\chi+\upsilon+m+1)}\delta_{mn} \qquad (\text{V-2})$$

$$\chi>-1,\upsilon>-1$$

Schrödinger 方程的 φ 分量方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_m}{\mathrm{d}\varphi^2}+[\kappa-U(\varphi)]\phi_m=0 \qquad (\text{V-3})$$

令 ϕ_m 满足正交关系

$$\int_{0}^{2\pi}\phi_n(\varphi)\phi_m(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{2^{\chi+\upsilon+1}}{\chi+\upsilon+2m+1}$$

$$\frac{\Gamma(\chi+m+1)\Gamma(\upsilon+m+1)}{m!\,\Gamma(\chi+\upsilon+m+1)}\delta_{mn} \qquad (\text{V-4})$$

当 $m=n$ 时比较 V-2 和 V-4 得,

$$\phi_m=(1-z)^{\frac{\chi}{2}}(1+z)^{\frac{\upsilon}{2}}P_m^{\chi\upsilon}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{V-5})$$

微分得到$\frac{\mathrm{d}\phi_m}{\mathrm{d}\varphi}$和$\frac{\mathrm{d}^2\phi_m}{\mathrm{d}\varphi^2}$,代入 V-3 使 $P_m^{\chi\upsilon}$ 的二阶导数的系数与 V-1 相

同，对比 $P_m^{\chi\upsilon}$ 的一阶导数的系数得到

$$(1-z^2)\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\varphi^2}+z(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi})^2=0 \tag{V-6}$$

解这个方程得到

$$z=\sin(C\varphi+D)\qquad C,D\in R \tag{V-7}$$

注意到 $\varphi\in[0,2\pi]$，$z\in[-1,1]$，可以确定这两个常数

$$C=\frac{1}{2}\qquad D=-\frac{\pi}{2} \tag{V-8}$$

$$\therefore\quad z=\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}) \tag{V-9}$$

对比 $P_m^{\chi\upsilon}$ 的系数可得

$$4U=\frac{\chi}{2}(\frac{\chi}{2}-1)\frac{1+z}{1-z}+\frac{\upsilon}{2}(\frac{\upsilon}{2}-1)\frac{1-z}{1+z}+\chi(1+z)\frac{z}{(1-z^2)}$$
$$-\upsilon(1-z)\frac{z}{(1-z^2)}-\frac{\upsilon\chi}{2}-\frac{1}{4}\frac{z^2}{(1-z^2)}-\frac{1}{2}+4\kappa$$
$$-m(m+\chi+\upsilon+1) \tag{V-10}$$

$$\phi_m=(1-z)^{\frac{\chi}{2}+\frac{1}{4}}(1+z)^{\frac{\upsilon}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{\chi\upsilon}=[1+\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})]^{\frac{\chi}{2}+\frac{1}{4}}$$
$$[1-\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})]^{\frac{\upsilon}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{\chi\upsilon}[\sin(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2})] \tag{V-11}$$

为了使 ϕ_m 在 $\varphi=[0,2\pi]$ 上解析，显然有 χ 和 υ 为半奇数，即 χ 和 υ 可以等于 $\frac{1}{2}$、$\frac{3}{2}$、$\frac{5}{2}$、…。此外，V-11 具有奇偶性，

$$\phi_m(\varphi)=\phi_m(-\varphi) \tag{V-12}$$

若令

$$\chi=\upsilon=-\frac{1}{2}\quad m^2=\kappa \tag{V-13}$$

则

$$U\equiv 0 \tag{V-14}$$

我们得到 Tschebyscheff 多项式 T_m

$$\phi_m = T_m(\cos\frac{\varphi}{2}) \qquad (\text{V-15})$$

如果物理问题关于 $\varphi = 0$ 对称，令 ϕ_m 满足正交关系

$$\int_0^\pi \phi_n(\varphi)\phi_m(\varphi)\mathrm{d}\varphi \frac{2^{\chi+\upsilon+1}}{\chi+\upsilon+2m+1}$$

$$\frac{\Gamma(\chi+m+1)\Gamma(\upsilon+m+1)}{m!\,\Gamma(\chi+\upsilon+m+1)}\delta_{mn} \qquad (\text{V-16})$$

经过同样运算可以得到，

$$U(\varphi) = -[-\kappa + m(m+\chi+\upsilon+1) + \frac{1}{2} + \frac{\chi\upsilon}{2}]$$

$$+ \frac{1}{1-z^2}[\frac{\chi}{2}(\frac{\chi}{2}-1)(1+z)^2 + \frac{\upsilon}{2}(\frac{\upsilon}{2}-1)(1-z)^2$$

$$+ \chi z(1+z) - \upsilon z(1-z) - \frac{z^2}{4}] \qquad (\text{V-17})$$

此时

$$\varphi \in [0,\pi], \quad z \in [-1,1] \qquad (\text{V-18})$$

$$\therefore \quad z = \sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = -\cos\varphi \qquad (\text{V-19})$$

V-19 确实关于 $\varphi = 0$ 对称。注意到

$$P_m^{\chi\upsilon}(-z) = (-1)^m P_m^{\upsilon\chi}(z) \qquad (\text{V-20})$$

对称解为

$$\phi_m = (1-z)^{\frac{\chi}{2}+\frac{1}{4}}(1+z)^{\frac{\upsilon}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{\chi\upsilon} = (-1)^m(1+\cos\varphi)^{\frac{\chi}{2}+\frac{1}{4}}$$

$$(1-\cos\varphi)^{\frac{\upsilon}{2}+\frac{1}{4}}P_m^{\chi\upsilon}(\cos\varphi) \qquad (\text{V-21})$$

为了使 ϕ_m 在 $\varphi \in [0,\pi]$ 解析，χ 和 υ 同为半奇数。若令

$$\chi = \upsilon = -\frac{1}{2} \quad m^2 = \kappa \qquad (\text{V-22})$$

则

$$U \equiv 0 \qquad (\text{V-23})$$

我们得到 Tschebyscheff 多项式 T_m

$$\phi_m = T_m(\cos\varphi) \tag{Ⅴ-24}$$

以上推导 ϕ_m 的过程中，我们弃置了一些非零常数，因为这些常数不影响 ϕ_m 作为检测函数空间的基底。

附录 Ⅵ　Δ 算子特征 0 形式方程 φ 分量的求解

把 14-14 写成

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m U(\varphi)\phi_m = 0 \tag{Ⅵ-1}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \{-[-\kappa + m(m+\chi+\upsilon+1) + \frac{1}{2} + \frac{\chi\upsilon}{2}](1-z^2)$$

$$+ [\frac{\chi}{2}(\frac{\chi}{2}-1)(1+z^2) + \frac{\upsilon}{2}(\frac{\upsilon}{2}-1)(1-z^2)$$

$$+ \chi z(1+z) - \upsilon z(1-z) - \frac{z^2}{4}]\}\phi_m = 0 \tag{Ⅵ-2}$$

或

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \{az^2 + bz + c\}\phi_m = 0 \tag{Ⅵ-3}$$

$$a = [-\kappa + m(m+\chi+\upsilon+1) + \frac{1}{2} + \frac{\chi\upsilon}{2}]$$

$$+ [\frac{\chi}{2}(\frac{\chi}{2}-1) + \frac{\upsilon}{2}(\frac{\upsilon}{2}-1) + \chi + \upsilon - \frac{1}{4}] \tag{Ⅵ-4}$$

$$b = \chi(\frac{\chi}{2}-1) - \upsilon(\frac{\upsilon}{2}-1) + \chi - \nu \tag{Ⅵ-5}$$

$$c = -[-\kappa + m(m+\chi+\upsilon+1) + \frac{1}{2} + \frac{\chi\upsilon}{2}]$$

$$+ [\frac{\chi}{2}(\frac{\chi}{2}-1) + \frac{\upsilon}{2}(\frac{\upsilon}{2}-1)] \tag{Ⅵ-6}$$

引用 Jacobi 多项式的递推公式

$$z\phi_m = \frac{1}{(2m+\chi+\upsilon+1)(2m+\chi+\upsilon)(2m+\chi+\upsilon+2)}$$

$$\times [2(m+1)(m+\chi+\upsilon+1)(2m+\chi+\upsilon)\phi_{m+1} - (2m+\chi+\upsilon+1)$$

$$\times(\chi^2-\upsilon^2)\phi_m+2(m+\chi)(m+\upsilon)(2m+\chi+\upsilon+2)\phi_{m-1}] \quad (\text{Ⅵ}-7)$$

展开 Ⅵ-3 得到

$$\begin{aligned}
&(c_0A_0+d_1A_1+e_2A_2) &= 0\\
&(b_0A_0+c_1A_1+d_2A_2+e_3A_3) &= 0\\
&(a_0A_0+b_1A_1+c_2A_2+d_3A_3+e_4A_4) &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
&(a_{m-4}A_{m-4}+b_{m-3}A_{m-3}+c_{m-2}A_{m-2}+d_{m-1}A_{m-1}+e_mA_m) &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots. &
\end{aligned} \quad (\text{Ⅵ-8})$$

从公式 Ⅵ-8 可以看出，只要有连续 4 个系数为零，则以后所有系数的递推结果都为零。

$$\begin{cases}
A_M(\chi,\upsilon,\kappa)=0\\
A_{M+1}(\chi,\upsilon,\kappa)=0\\
A_{M+2}(\chi,\upsilon,\kappa)=0\\
A_{M+3}(\chi,\upsilon,\kappa)=0
\end{cases} \quad (\text{Ⅵ-9})$$

但是这基本上是不可能的，因为我们没有足够的可以独立变化的参数来保证方程组一定有解。

如果我们令 Ⅵ-5 中的 b 为零，则有

$$\chi=\pm\upsilon \quad (\text{Ⅵ-10})$$

为了保证 Φ_M 解析，χ 和 υ 同为半奇数，注意 χ 和 υ 都是大于 -1 的数，如果 χ 和 υ 的绝对值不等于 1/2，则显然上式的右端只能取正号。

$$\chi=\upsilon \quad (\text{Ⅵ-11})$$

于是 Ⅵ-3 成为

$$\sum_{m=0}^{\infty}A_m\{ay^2+c\}\phi_m=0 \quad (\text{Ⅵ-12})$$

Jacobi 多项式的递推公式变为

$$z\phi_m=\frac{1}{(2m+2\chi+1)(m+\chi)(m+\chi+1)}[(m+1)(m+2\chi+1)$$

$$\times(m+\chi)\phi_{m+1}+(m+\chi)^2(m+\chi+1)\phi_{m-1}]$$

$$=R_m\phi_{m+1}+S_m\phi_{m-1} \tag{Ⅵ-13}$$

其中

$$R_m=\frac{(m+1)(m+2\chi+1)(m+\chi)}{(2m+2\chi+1)(m+\chi)(m+\chi+1)} \tag{Ⅵ-14}$$

$$S_m=\frac{(m+\chi)^2(m+\chi+1)}{(2m+2\chi+1)(m+\chi)(m+\chi+1)} \tag{Ⅵ-15}$$

把 Ⅵ-13 代入 Ⅵ-12

$$\sum_m(a_m\phi_{m+2}+c_m\phi_m+e_m\phi_{m-2})A_m=0 \tag{Ⅵ-16}$$

其中

$$\begin{aligned}a_m&=aR_mR_{m+1}\\c_m&=aR_mS_{m+1}+aS_mR_{m-1}+c\\e_m&=aS_mS_{m-1}\end{aligned} \tag{Ⅵ-17}$$

展开 Ⅵ-16 可得

$$\begin{aligned}&(c_0A_0+e_2A_2)&&=0\\&(c_1A_1+e_3A_3)&&=0\\&(a_0A_0+c_2A_2+e_4A_4)&&=0\\&(a_1A_1+c_3A_3+e_5A_5)&&=0\\&\cdots\cdots&&\\&(a_{2m-2}A_{2m-2}+c_{2m}A_{2m}+e_{2m+2}A_{2m+2})&&=0\\&(a_{2m-1}A_{2m-1}+c_{2m+1}A_{2m+1}+e_{2m+3}A_{2m+3})&&=0\\&\cdots\cdots&&\end{aligned} \tag{Ⅵ-18}$$

上式可以按 m 为奇数或偶数分为两个完全独立的递推序列，它们有各自的任意常数。因此，为了使递推截止，只要有两个相间的系数为零就可以了。

$$\begin{cases} A_M(\chi, \upsilon, \kappa) = 0 \\ A_{M+2}(\chi, \upsilon, \kappa) = 0 \end{cases} \tag{Ⅵ-19}$$

最后我们得到的 Φ_M 为

$$\Phi_M = A_0 \Phi_M^1 + A_1 \Phi_M^2 \tag{Ⅵ-20}$$

其中 A_0 和 A_1 是任意常数,

$$\Phi_M^1 = \sum_{n=0}^{M-1} B_n \phi_n \qquad n \text{ 为偶数} \tag{Ⅵ-21}$$

$$\Phi_M^2 = \sum_{m=1}^{M-1} D_m \phi_m \qquad m \text{ 为奇数} \tag{Ⅵ-22}$$

B_n 和 D_m 是递推得到的已知常数。如果采用 Schrödinger 方程 $U \neq 0$ 的解展开 Φ_M,则最终得到的特征解 Φ 具有旋涡结构。

附录 Ⅶ　用 Hermite 多项式求 Schrödinger 方程的固态解

广义 Hermite 多项式 H_n^a 的标准方程[3] 是

$$u\frac{d^2 H_n^a}{du^2} + 2(a - u^2)\frac{dH_n^a}{du} + (2nu - \frac{\vartheta_n}{u})H_n^a = 0 \qquad (Ⅶ\text{-}1)$$

其中

$$\vartheta_{2m} = 0 \qquad \vartheta_{2m+1} = 2a \qquad (Ⅶ\text{-}2)$$

H_n^a 的正交关系是

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^{2a}e^{-u^2} H_m^a H_n^a du = C\delta_{mn} \quad C \in R \qquad (Ⅶ\text{-}3)$$

广义 Hermite 多项式 H_n^a 的递推公式是

$$H_{n+1}^a(u) = 2uH_n^a(u) - (2n + \vartheta_n)H_{n-1}^a(u) \qquad (Ⅶ\text{-}4)$$

令 ϕ_n 满足正交关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_m \phi_n dy = C_{mn}\delta_{mn} \qquad (Ⅶ\text{-}5)$$

令 $m = n$，比较 Ⅶ-3 和 Ⅶ-5 可得

$$\phi_n = H_n^a u^a e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{1}{2}} \qquad (Ⅶ\text{-}6)$$

其中 $du/dy \geqslant 0$。微分可得

$$\frac{d\phi_n}{dy} = \frac{dH_n^a}{du}u^a e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{3}{2}} + aH_n^a u^{a-1} e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{3}{2}}$$

$$- uH_n^a u^a e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}H_n^a u^a e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2 u}{dy^2} \qquad (Ⅶ\text{-}7)$$

$$\frac{d^2\phi_n}{dy^2} = \frac{d^2 H_n^a}{du^2}u^a e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{5}{2}} + a\frac{dH_n^a}{du}u^{a-1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{5}{2}} - \frac{dH_n^a}{du}u^{a+1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{du}{dy})^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}H_n^\alpha}{\mathrm{d}u}u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}H_n^\alpha}{\mathrm{d}u}u^{\alpha-1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}$$

$$+\alpha(\alpha-1)H_n^\alpha u^{\alpha-2}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}-\alpha H_n^\alpha u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}$$

$$+\frac{3}{2}\alpha H_n^\alpha u^{\alpha-1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}-\frac{\mathrm{d}H_n^\alpha}{\mathrm{d}u}u^{\alpha+1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}$$

$$-(\alpha+1)H_n^\alpha u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}+H_n^\alpha u^{\alpha+2}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{5}{2}}$$

$$-\frac{3}{2}H_n^\alpha u^{\alpha+1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}+\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}H_n^\alpha}{\mathrm{d}u}u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$$

$$+\frac{\alpha}{2}H_n^\alpha u^{\alpha-1}e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}-\frac{u}{2}H_n^\alpha u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$$

$$-\frac{1}{4}H_n^\alpha u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{\frac{3}{2}}(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2})^2+\frac{1}{2}H_n^\alpha u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y})^{-\frac{1}{2}}\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3} \quad (\text{Ⅶ-8})$$

代入方程

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_n}{\mathrm{d}y^2}-[U(y)+\varepsilon]\phi_n=0 \quad (\text{Ⅶ-9})$$

整理之，比较$\frac{\mathrm{d}H_n^\alpha}{\mathrm{d}u}$的系数得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}=0 \quad \Rightarrow \quad u=\mu y \quad (\text{Ⅶ-10})$$

再比较 H_n^α 的系数，得：

$$\frac{U(y)+\varepsilon}{\mu^2}=-2\alpha-1-2n+\frac{\vartheta_n+\alpha(\alpha-1)}{u^2}+u^2 \quad (\text{Ⅶ-11})$$

$$\phi_n=u^\alpha e^{-\frac{u^2}{2}}H_n^\alpha \quad (\text{Ⅶ-12})$$

对 u^α 微分使 u 的幂次减少 1，对 H_n^α 微分使 u 的幂次不变，对 $e^{-\frac{u^2}{2}}$ 微分使 u 的幂次加 1，显然，只要 α 是正整数，ϕ_n 就是 C^∞ 的。

附录 Ⅷ　求 Δ 算子的固态特征解

直角坐标下的 Δ 算子特征方程

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\lambda\Phi \tag{Ⅷ-1}$$

令

$$\Phi=\Phi_N(x)\Phi_M(y)\Phi_L(z) \tag{Ⅷ-2}$$

$$\Phi_N=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\phi_n\quad \Phi_M=\sum_{m=0}^{\infty}A_m\phi_m\quad \Phi_L=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\phi_l \tag{Ⅷ-3}$$

$$\phi_n=(\mu x)^{\alpha}e^{-\frac{(\mu x)^2}{2}}H_n^{\alpha}\quad \phi_l=(\mu y)^{\beta}e^{-\frac{(\mu y)^2}{2}}H_l^{\beta}$$

$$\phi_m=(\mu z)^{\gamma}e^{-\frac{(\mu z)^2}{2}}H_m^{\gamma} \tag{Ⅷ-4}$$

则

$$\Phi=\Phi_N(x)\Phi_M(y)\Phi_L(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_lA_mA_n\phi_n\phi_m\phi_l \tag{Ⅷ-5}$$

代入 Ⅷ-1 得

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_lA_mA_n[U(x)-\lambda+U(y)+U(z)]\phi_n\phi_m\phi_l=0 \tag{Ⅷ-6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_lA_m\left\{\sum_{n=0}^{\infty}A_n[U(x)-\lambda]\phi_n\right\}\phi_m\phi_l\\&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_nA_m\left\{\sum_{l=0}^{\infty}A_lU(y)\phi_l\right\}\phi_m\phi_n\\&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}A_lA_n\left\{\sum_{m=0}^{\infty}A_mU(z)\phi_m\right\}\phi_l\phi_n=0\end{aligned} \tag{Ⅷ-7}$$

上式成立当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n[U(x)-\rho]\phi_n=0\quad \rho=\frac{\lambda}{\mu^2} \tag{Ⅷ-8}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m U(z)\phi_m = 0 \tag{Ⅷ-9}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l U(y)\phi_l = 0 \tag{Ⅷ-10}$$

ϕ_n 满足递推公式

$$u\phi_n = \frac{1}{2\alpha}[\phi_{n+1} + 2(n+1)\alpha\phi_{n-1}] \tag{Ⅷ-11}$$

展开 Ⅷ-8 至 Ⅷ-10 可得

$$\begin{aligned}
&(c_0A_0 + d_2A_2) &= 0\\
&(c_1A_1 + d_3A_3) &= 0\\
&(b_0A_0 + c_2A_2 + d_4A_4) &= 0\\
&(b_1A_1 + c_3A_3 + d_5A_5) &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
&(b_{2m-2}A_{2m-2} + c_{2m}A_{2m} + d_{2m+2}A_{2m+2}) &= 0\\
&(b_{2m-1}A_{2m-1} + c_{2m+1}A_{2m+1} + d_{2m+3}A_{2m+3}) &= 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned} \tag{Ⅷ-12}$$

上式可以按 n 为奇数或偶数分为两个完全独立的递推序列，它们有各自的任意常数 A_0 和 A_1。因此，为了使递推截止，只要有两个相间的系数为零就可以了。这样，在三个分量上有六个代数方程，加上

$$\varepsilon + \sigma + \kappa = 0 \tag{Ⅷ-13}$$

共有 7 个代数方程，我们一共有 7 个可变参数 α、β、γ、ρ、κ、σ 和 ε，其中 $\rho \geqslant 0$。还有 L、M 和 N 可以取任意正整数。根据命题 14-1，满足 Ⅷ-1 的有限维固态解必然存在。

附录 IX　Schrödinger 方程和 Δ 算子特征方程分解变量

Schrödinger 方程和 Δ 算子特征方程在球坐标下分解变量

使用球坐标，把 Schrödinger 方程和 Δ 算子特征方程统一写作

$$-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)-\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Omega}{\partial\theta}\right)$$

$$-\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Omega}{\partial\varphi^2}=S\Omega \tag{IX-1}$$

$S=U,\Omega=\phi$ 就得 Schrödinger 方程；$S=\lambda,\Omega=\Phi$ 就得 Δ 算子特征方程。

令

$$\Omega=\Omega_l(\theta)\Omega_m(\varphi)\Omega_n(r) \tag{IX-2}$$

$$S=\frac{1}{r^2}S(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}S(\varphi)+S(r) \tag{IX-3}$$

IX-1 可以写为

$$-\frac{\Omega_l\Omega_m}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Omega_n}{\partial r}\right)-\frac{\Omega_n\Omega_m}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Omega_l}{\partial\theta}\right)-\frac{\Omega_n\Omega_l}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Omega_m}{\partial\varphi^2}$$

$$=\left[\frac{1}{r^2}S(\theta)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}S(\varphi)+S(r)\right]\Omega_l\Omega_m\Omega_n \tag{IX-4}$$

或

$$-\frac{1}{\Omega_n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Omega_n}{\partial r}\right)-r^2S(r)=\frac{1}{\Omega_l\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Omega_l}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{\Omega_m\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Omega_m}{\partial\varphi^2}+\left[S(\theta)+\frac{1}{\sin^2\theta}S(\varphi)\right] \tag{IX-5}$$

把径向方程分解出来

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}\Omega_n}{\mathrm{d}r}\right)+\left[r^2S(r)-\sigma\right]\Omega_n=0\qquad\sigma\in R \tag{IX-6}$$

IX-5 剩下的部分为

$$\frac{\sin\theta}{\Omega_l}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Omega_l}{\partial\theta})+\sigma\sin^2(\theta)+\sin^2\theta S(\theta)$$

$$=-\frac{1}{\Omega_m}\frac{\partial^2\Omega_m}{\partial^2\varphi}-S(\varphi) \tag{Ⅸ-7}$$

继续分解得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Omega_1}{\mathrm{d}\theta})+[\sigma+S(\theta)-\frac{\kappa}{\sin^2\theta}]\Omega_l=0 \tag{Ⅸ-8}$$

和
$$\frac{\mathrm{d}^2\Omega_m}{\mathrm{d}\varphi^2}+[\kappa+S(\varphi)]\Omega_m=0\quad \kappa\in R \tag{Ⅸ-9}$$

令 $S=U,\Omega=\phi,\kappa=m^2,\sigma=l(l+1)$ 就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}\phi_n}{\mathrm{d}r})+[r^2U(r)-l(l+1)]\phi_n=0 \tag{Ⅸ-10}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\phi_l}{\mathrm{d}\theta})+[l(l+1)+U(\theta)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\phi_l=0 \tag{Ⅸ-11}$$

和
$$\frac{\mathrm{d}^2\phi_m}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\phi_m=0 \tag{Ⅸ-12}$$

令 $S=\lambda,\Omega=\Phi$ 就得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}\Phi_N}{\mathrm{d}r})+[r^2\lambda-l(l+1)]\Phi_N=0 \tag{Ⅸ-13}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Phi_L}{\mathrm{d}\theta})+[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\Phi_L=0 \tag{Ⅸ-14}$$

和
$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_M}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi_M=0 \tag{Ⅸ-15}$$

Schrödinger 方程和 Δ 算子特征方程在直角坐标下分离变量

$$-\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}=S\Omega \tag{Ⅸ-16}$$

令
$$\Omega=\Omega_n(x)\Omega_m(y)\Omega_l(z) \tag{Ⅸ-17}$$

$$S = S(x) + S(y) + S(z) \tag{Ⅸ-18}$$

把 Ⅸ-17 和 Ⅸ-18 代入 Ⅸ-16

$$\frac{1}{\Omega_n}\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial x^2} + \frac{1}{\Omega_m}\frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial y^2} + \frac{1}{\Omega_l}\frac{\partial^2 \Omega_l}{\partial z^2} = -[S(y) + S(z) + S(x)] \tag{Ⅸ-19}$$

整理可得

$$\frac{1}{\Omega_n}\frac{\partial^2 \Omega_n}{\partial x^2} + S(x) = -\frac{1}{\Omega_m}\frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial y^2} - \frac{1}{\Omega_l}\frac{\partial^2 \Omega_l}{\partial z^2} - S(y) - S(z) \tag{Ⅸ-20}$$

方程左端只是 x 的函数，而右端只是 y 和 z 的函数，因此只能是一个常数，所以有

$$\frac{d^2 \Omega_n}{dx^2} + [S(x) - \varepsilon]\Omega_n = 0 \tag{Ⅸ-21}$$

和

$$\varepsilon + \frac{1}{\Omega_m}\frac{\partial^2 \Omega_m}{\partial y^2} + S(y) = -\frac{1}{\Omega_l}\frac{\partial^2 \Omega_l}{\partial z^2} - S(z) \tag{Ⅸ-22}$$

继续分解得到

$$\frac{d^2 \Omega_l}{dz^2} + [S(z) - \sigma]\Omega_l = 0 \tag{Ⅸ-23}$$

和

$$\varepsilon + \frac{1}{\Omega_m}\frac{d^2 \Omega_m}{dy^2} + S(y) = -\sigma \tag{Ⅸ-24}$$

令

$$\varepsilon + \kappa + \sigma = 0 \tag{Ⅸ-25}$$

则

$$\frac{d^2 \Omega_m}{dy^2} + [S(y) - \kappa]\Omega_m = 0 \tag{Ⅸ-26}$$

有趣的是，分解得到的三个方程 Ⅸ-21、Ⅸ-23、Ⅸ-26 形式完全一样，它们的求解过程和最终得到的解也将完全一样。

附录 X　求解 ΔΔ 的特征 0 形式

在第十二章中我们推导出的基本方程为

$$(\Delta)^{m+1}\alpha = (\Delta_\delta)^{m+1}\alpha = I \tag{X-1}$$

$$(\Delta)^{n+1}\beta = (\Delta_d)^{n+1}\beta = J \tag{X-2}$$

这时候，Hodge 分解为

$$\eta = d(\Delta_\delta)^m\alpha + \delta(\Delta_d)^n\beta + \gamma \tag{X-3}$$

15-25 和 15-26 可以写成

$$\begin{aligned} d\omega &= d * \eta = d * (d(\Delta_\delta)^m\alpha + \delta(\Delta_d)^n\beta + \gamma) \\ &= (-1)^\epsilon * (\Delta_\delta)^{m+1}\alpha \end{aligned} \tag{X-4}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= d\eta = d(d(\Delta_\delta)^m\alpha + \delta(\Delta_d)^n\beta + \gamma) \\ &= (\Delta_d)^{n+1}\beta \end{aligned} \tag{X-5}$$

代入 Stokes 公式得到

$$< *C_k, (-1)^\epsilon * (\Delta_\delta)^{m+1}\alpha > = < \partial * C_k, * \eta_0 > \tag{X-6}$$

$$< C_k, (\Delta_d)^{n+1}\beta > = < \partial C_k, \eta_0 > \tag{X-7}$$

为了求解这两式，我们必须求出特征方程

$$(\Delta_\delta)^{m+1}\Phi = \lambda\Phi \tag{X-8}$$

和

$$(\Delta_d)^{n+1}\Phi = \mu\Phi \tag{X-9}$$

的解，下面我们考虑 $m = 1, p = 0$ 的情况：

$$\Delta_\delta\Delta_\delta\Phi = \Delta\Delta\Phi = \lambda\Phi \tag{X-10}$$

采用 Schrödinger 方程的气态特征解，令

$$\Phi = \phi_l\phi_m \sum A_n\phi_n \tag{X-11}$$

则

$$\Delta\Phi = \phi_l\phi_m \sum A_n U\phi_n \tag{X-12}$$

代入 X-10 得

$$-\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\left(\phi_l\phi_m\sum A_nU\phi_n\right)=\lambda\phi_l\phi_m\sum A_n\phi_n$$

(X-13)

或

$$-\left[\frac{\phi_l\phi_m}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\sum A_nU\phi_n}{\partial r}\right)+\frac{\phi_m\sum A_nU\phi_n}{r^2\sin\theta}\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi_l}{\partial\theta}\right)+\frac{\phi_l\sum A_nU\phi_n}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial\varphi^2}\right]=\lambda\phi_l\phi_m\sum A_n\phi_n$$

(X-14)

分离变量

$$\frac{1}{\sum A_nU\phi_n}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\sum A_nU\phi_n}{\partial r}\right)+\lambda r^2\frac{\sum A_n\phi_n}{\sum A_nU\phi_n}=-\frac{1}{\sin\theta\phi_l}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi_l}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta\phi_m}\frac{\partial^2\phi_m}{\partial\varphi^2}\qquad(X\text{-}15)$$

径向方程为

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\sum A_nU\phi_n}{dr}\right)+\lambda r^2\sum A_n\phi_n+l(l+1)\sum A_nU\phi_n=0$$

(X-16)

θ 向方程为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\phi_l}{d\theta}\right)-\left[l(l+1)+\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\phi_l=0\qquad(X\text{-}17)$$

φ 向方程为

$$\frac{d^2\phi_m}{d\varphi^2}+m^2\phi_m=0\qquad(X\text{-}18)$$

可见 X-10 的 θ 向方程和 φ 向方程的解与

$$\Delta\Phi=\lambda\Phi\qquad(X\text{-}19)$$

完全一样，其径向解满足

$$\sum A_n \{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2 \frac{\mathrm{d}U\phi_n}{\mathrm{d}r}) + [\lambda r^2 + l(l+1)U]\phi_n \} = 0 \tag{Ⅹ-20}$$

把气态解的势

$$U(r) = \mu^2 \{ [n + \frac{\alpha+1}{2}]x^{-1} - \frac{1}{4} \} \qquad \alpha = 2l+1 \tag{Ⅹ-21}$$

代入 Ⅹ-20，利用 Sonine-Laguerre 多项式的递推公式也可以把 Ⅹ-20 展开为与 Ⅱ-7 或 Ⅱ-16 类似的结果，按照命题 14-1，应该存在有限维的解。任意多重调和算子的特征值和特征 0 形式都可以用类似方法求出，对此我们不再深入研究。

参 考 文 献

1 陈省身,陈维桓.微分几何讲义.北京:北京大学出版社,1983

2 程国均.群表示论及其在量子力学中的应用.成都:四川大学出版社,1988

3 Chihara, T. S., An Introduction to Orthogonal Polynomials, New York: Science Publishers, 1978

4 都长清,焦宝聪,焦炳照.常微分方程.北京:首都师范大学出版社,1993

5 Gilmore, R., Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications, New York: John Wiley & Sons, 1963

6 韩其智,孙洪洲.群论.北京:北京大学出版社,1985

7 黄正中.微分几何导引.南京:南京大学出版社,1992

8 侯伯元,侯伯宇.物理学家用微分几何.北京:科学出版社,1990

9 蒋尔雄,高坤敏,吴景琨.线性代数.上海:人民教育出版社,1978

10 梁昆淼.数学物理方法.北京:人民教育出版社,1979

11 林振声,杨信安.微分方程稳定性理论.福州:福建科学技术出版社,1988

12 刘式适,刘式达.特殊函数.北京:气象出版社,1988

13 Mores, P., Methods of Theoretical Physics, New York: McGraw-Hill book co., 1953

14 齐民友.广义函数与数学物理方程.北京:高等教育出版社,1989

15 清华大学工程力学系.流体力学基础.北京:机械工业出版社,1980

16 唐有祺.统计力学及其在物理化学中的应用.北京:科学出版社,1964

17　万哲先.李代数.北京：科学出版社，1978

18　Warner, F. W. , Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, New York: Springer-Verlag, 1971

19　魏晓明.一个用流函数方程求解叶轮机械 S_1 流面跨音速问题的方法.北京：机械工程学报，2，1987

20　Westenholz, C. Von , Differential Forms in Mathematical Physics, Amsterdam: North Holland Pub. Co. , 1978.

21　杨万年.微分流形及其应用.重庆：重庆大学出版社，1992

22　张锦炎.常微分方程几何理论与分支问题.北京：北京大学出版社，1981

23　张芷芬，丁同仁，黄文灶，董镇喜.微分方程定性理论.北京：科学出版社，1985

24　邹凤梧，刘中柱，周怀春.积分表汇编.北京：宇航出版社，1992

索　引

E

F

G

H

J

K

L

M

N

人 名 对 照

Abel	阿贝尔	Beltrami	贝尔特拉米
Bessel	贝塞尔	Boltzmann	玻尔兹曼
Bose	玻色	Cartan	嘉当
Casimir	卡塞米尔	Cauchy	柯西
Chevalley	舍瓦累	Clausius	克劳修斯
de Rham	德瑞姆	Derichlet	狄里希利
Descartes	笛卡尔	Dirac	狄拉克
Einstain	爱因斯坦	Euler	欧拉
Faraday	法拉第	Fermi	费米
Frobenius	弗罗比尼乌斯	Gibbs	吉布斯
Hankel	汉克尔	Hausdorff	豪斯道夫
Helmholtz	亥姆霍兹	Hermite	厄密
Hilbert	希尔伯特	Hodge	霍奇
Hooke	虎克	Jacobi	雅可比
Jordan	约当	Killing	基林
Lacah	拉卡	Lagrange	拉格朗日
Laguerre	拉盖尔	Lame	拉梅
Laplace	拉普拉斯	Legendre	勒让德
Leibnitz	莱布尼茨	Levi-civita	勒维-奇维塔
Livouville	刘维尔	Lorentz	罗伦兹
Maurer	摩勒	Navier	纳维尔
Neumman	诺埃曼	Pauli	泡利
Pfaff	法普	Poincare	庞加莱
Poisson	泊凇	Renolds	雷诺
Riemann	黎曼	Schmidt	施密特
Schrödinger	薛定谔	Schur	舒尔
Sonine	索宁	Stokes	斯托克斯
Taylor	泰勒	Weyl	维尔

[General Information]

□□=□□□□□□□□□□

□□=□□□□

□□=240

□□□=□□□□□□□□□□□□□

□□□□=1999

SS□=10868124

DX□=000000216851

URL=http://book.szdnet.org.cn/bookDetail.jsp?dxNumber=000000216851&d=9DACE1E98C2F00CD89DD2C7656DB8BC7

□□
□□
□□
□□
□□
□ □

□□□□□□□□□□
□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□□□G
□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□
□□□△□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□
□□□Schrodinger□□
□□□□□□△□□□□□□□
□□□□p□□□□□□□□□
□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□
□□□□□□□
□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□Ⅰ □Sonine-Laguerre□□□□Schr□dinger□□□
□□□
□□Ⅱ △□□□□0□□□□□□□□□□□
□□Ⅲ □Jacobi□□□□Schr□dinger□□□θ□□□
□□Ⅳ△□□□□0□□□□θ□□□□□
□□Ⅴ □Jacobi□□□□Schr□dinger□□□ψ□□□
□□Ⅵ △□□□□0□□□□ψ□□□□□
□□Ⅶ □Hermite□□□□Schr□dinger□□□□□□
□□Ⅷ □△□□□□□□□□
□□Ⅸ Schr□dinger□□□△□□□□□□□□□□
□□Ⅹ □□△△□□□0□□
□□□□
□□
□□□□